Math.p.
746
i

681.
Math. p. 746 i

Bibliothek
des
Hamb. Gesundheitsrathes.
~~XVI. 1.~~
XVIII. 1.

12141/2

BESCHAFFT AUS MITTELN DER

Carl Friedrich von Siemens
Stiftung

Arithmetische Abhandlungen

über

juristische, staats- und forstwirthschaftliche Fragen, Mortalität, Bevölkerung und chronologische Bestimmungen

von

Karl Christian Langsdorf,

Großherzogl. Badischem Geheimen Hofrath und Professor der Mathematik zu Heidelberg; Professor honorarius der Russ. kaiserl. Universität zu Wilna; der königlichen Societäten der Wissenschaften zu Göttingen, zu Haarlem und zu München, der kaiserl. Leopold. Akademie der Naturforscher u. a. Mitglied.

Heidelberg und Mannheim,
bei Schwan und Götz.
1810.

Bayerische Staatsbibliothek München
cb 1391/266

Dem

Durchlauchtigsten

Erbprinz

Wilhelm von Nassau.

Durchlauchtigster Erbprinz!

In diesen Blättern finden Eure Durchlaucht jene Lehren wieder, deren mündlichen Vortrag Höchstdieselben im verflossenen Sommer bei mir anzuhören die Gnade hatten. Ich unterstehe mich, sie Eurer Durchlaucht ehrerbietigst zu widmen, um damit einen Beweis zu geben, wie unvergeßlich mir die Stunden sind, in welchen Eure Durchlaucht so vieles Interesse für Gegenstände dieser Art bezeugten.

Heidelberg im Februar 1810.

In tiefster Verehrung

Karl Christian Langsdorf.

Vorerinnerung.

Die nächste Veranlassung zur öffentlichen Bekanntmachung dieser kleinen Schrift ist die auf guten Gründen beruhende Forderung der unserer Universität vorgesetzten hohen Behörde, daß, wo nicht ganz besondere Hindernisse in den Weg treten, bei jeder Vorlesung eine schon im Druck erschienene Schrift als Leitfaden zum Grunde gelegt werden soll. Der gegenwärtige soll mir als solcher bei meinen Vorlesungen über politische Arithmetik dienen. Wenn es Hauptzweck des Universitäts-Unterrichts ist, auf die Ausbildung junger

Männer, in Bezug auf die unmittelbare Brauchbarkeit für den Staat, zu wirken, so wird man die Wichtigkeit solcher Vorlesungen nicht verkennen. Der junge Mann, dem es im Ernste darum zu thun ist, einst als brauchbarer Geschäftsmann seinem Vaterlande nützlich zu werden, ist übel berathen, wenn man ihm vom Katheder herab den Kopf mit leeren Spekulationen anfüllt, die wenigstens für ihn durchaus nur als solche gelten können, weil sie beinahe gar keinen oder doch einen zu sehr entfernten Bezug auf Forderungen haben, die man einst an ihn als Geschäftsmann machen muß. Wenn man ihm sagt, daß er, als Kameralist und selbst als Jurist, und überhaupt schon als Mann von Bildung der mathematischen Kenntnisse nicht ganz entbehren könne, und wenn nun der Lehrer der Mathematik ihn nicht selbst näher mit den Gränzen bekannt macht, innerhalb welchen ihm mathematische Kenntnisse bei

künftigen Geschäftsführungen nützlich und wichtig werden können; wenn dieser vielmehr die Miene annimmt, als sey eine umfassende Kenntniß der Lehre von den höheren Gleichungen, von den Reihen u. d. gl. die Differential- und Integralrechnung und höhere Geometrie für denselben höchst wichtig, so geht nach meiner Ueberzeugung der akademische Lehrer nicht gewissenhaft zu Werk, wenigstens nicht mit Einsicht. Dem akademischen Jünglinge muß die kurze akademische Laufbahn nicht durch unnöthigen Zeitaufwand noch mehr abgekürzt, ihm nicht Stunden entzogen werden, die er zur Erwerbung nützlicherer Kenntnisse verwenden könnte. Zu diesem Zwecke scheinen mir, in Bezug auf Arithmetik, die hier vorgetragenen Lehren, deren vollständige Erläuterung dem mündlichen Vortrage hinlänglichen Anlaß zu mannichfaltigen Anwendungen giebt, für Jeden zureichend, der nicht besondern Beruf zu einem

tieferen mathematischen Studium in sich fühlt. Dem Rechtsgelehrten können, in Bezug auf jährliche Revenüen, auf jährliche Legate, auf die Quarta Falcidia, auf das Paktum antichretikum, Fragen vorkommen, deren Beantwortung er ablehnen muß, wenn ihm die hier vorgetragenen Lehren unbekannt sind. Kontrakte aller Art, die sich auf einen jährlichen Ertrag beziehen, können ihn in Verlegenheit setzen. Der Kameralist ist dieses Namens unwerth, wenn er als solcher in vorkommenden Fällen seine Zuflucht zu einem damit bekannten Rechner nehmen muß. Dem Forstmanne ist bei seinen Taxationen die Kenntniß dieser Lehren unentbehrlich. Unzählige höchst interessante Fragen können dem Staatsmanne vorgelegt werden, die er ohne Bekanntschaft mit den Gesetzen der Mortalität und der Bevölkerung durchaus nicht beantworten kann. Wittwen- und Waisenkassen, höchst wichtige Bedürfnisse für jeden

Staat, beruhen auf Kenntnissen dieser Art. Tiefes Studium der Chronologie kann Männern überlassen werden, die sich diesem und verwandten Studien ganz widmen; aber nicht selten kommen Fragen vor, wo von Festsetzung bestimmter Tage für das nächste Jahr die Rede ist, z. B. von Zahlungstagen, von Markttagen u. d. g.; dem Kameralist, dem Prediger u. a. können Angelegenheiten vorkommen, die es ihm z. B. wichtig machen, zu wissen, wann im nächsten Jahre die Ostern und andere Festtage fallen. Man wird daher immer soviel aus der Chronologie zu wissen fordern können, als ich hier im letzten Kapitel davon beigebracht habe, welches auch durchaus keiner mündlichen Erläuterung bedarf. In den übrigen Kapiteln ist der Vortrag gedrängter; Beispiele zur Erläuterung habe ich dem mündlichen Unterrichte vorbehalten. Nur hin und wieder habe ich Bemerkungen, die gleichfalls

dem mündlichen Vortrage hätten überlassen werden können, beigefügt, weil sie Ansichten enthalten, die ich auch denen mitgetheilt wünschte, welche meinem Vortrage hierüber nicht beiwohnen können. Ich wünschte diesen eine größere Publicität, und dieses wird hoffentlich hinreichend seyn, um dem sonst zu befürchtenden Vorwurfe zu begegnen, daß ich das Gesetz der Kürze nicht gleichförmig genug befolgt habe. Heidelberg im Februar 1810.

K. C. Langsdorf.

Inhalt.

I. Kap. Buchstabenrechnung. 3

II. Kap. Von den Gleichungen überhaupt, und insbesondere von Auflösung der Gleichungen vom ersten und zweiten Grade. 15

III. Kap. Von den arithmetischen und geometrischen Reihen. 23

IV. Kap. Von den Logarithmen. 28

V. Kap. Das Interusurium und damit zusammenhängende Berechnungen; auch das Paktum antichretikum. 37

VI. Kap. Gesetze der Mortalität und der Bevölkerung. 49

VII. Kap. Leibrentenberechnung. 66

VIII. Kap. Das Legatum annuum und die Quarta Falcidia. 81

Seite

IX. Kap. Von den Tontinen. 75

X. Kap. Von den Wittwenkassen. 77

XI. Kap. Von den Waisenkassen. 95

XII. Kap. Chronologische Bestimmungen. 100

Angehängte Tafeln.

I. Tafel. Welche die durch Zinsen von Zinsen steigenden Werthe eines Kapitals angiebt. 123

II. Tafel. Welche den gegenwärtigen Werth eines künftigen Kapitals angiebt. 125

III. Taf. Gegenwärtiger Werth einer zufallenden Rente. 127

IV. Taf. Sterblichkeitsordnung im Allgemeinen, für den Beharrungsstand der Bevölkerung. 129

V. Taf. Sterblichkeitsordnung für das männliche Geschlecht. 135

VI. Taf. Für das weibliche. 141

VII. Taf. Die Schwedische Sterblichkeitstafel von Wargentin. 147

VIII. Taf. Die Halley'sche aus Breslau. 149

Seite

IX. Taf. Die Londner nach Simpson. ---------- 151

X. Taf. Die Kerseboomsche für Holland und Westfriesland. ---------------------- 153

XI. Taf. Die Kritterſche für beide Geschlechter. ---- 156

XII. Taf. Für Rentirer. ------------------ 165

XIII. Taf. Hülfstafel zur Berechnung der Leibrenten. 167

XIV. Taf. Anhang zu XII. und XIII. ---------- 171

XV. Taf. Nachtrag zu den Mortalitätslisten. ---- 173

Arithmetische Abhandlungen

über

juristische, staats- und forstwirthschaftliche Fragen, Mortalität, Bevölkerung und einige chronologische Bestimmungen.

Erstes Kapitel.

Buchstabenrechnung.

§. 1.

Als allgemeiner Zeichen, wodurch unbestimmte Mengen von Einheiten ausgedrückt werden, bedient man sich der Buchstaben. Die Buchstabenrechnung lehrt, wie sich die verschiedenen Rechnungsoperationen, welche mit Zahlen, an deren Stelle die Buchstaben stehen, vorgenommen werden sollen, bequem ausdrücken, und welche Veränderungen sich mit diesen Ausdrücken vornehmen lassen.

§. 2.

Aus der gemeinen Arithmetik werden die Bedeutungen der Zeichen +, —, ., ×, :, √ hier als bekannt vorausgesetzt. Größen, die mit + oder — zusammenhängen, heißen Glieder eines Ausdrucks; eine aus mehreren Gliedern bestehende Größe eine zusammengesetzte Größe, besonders eine zweitheilige, dreitheilige u. s. f. wenn sie aus zwei, aus drei Gliedern u. s. f. besteht.

§. 3.

Jede Zahl, insofern sie blos eine Menge von Einheiten bezeichnet, wird als eine positive oder bejahte Größe

betrachtet. Ist die Einheit eine Größe bestimmter Art, z. B. Fuß, Zoll, Pfund, Gulden, Reichsthaler, Zeitminuten, Zeitsecunden u. dgl., so bleibt die bloße Menge solcher Einheiten eine bejahte Größe. Giebt es aber zwei einander gerade entgegengesetzte Begriffe, auf welche sich die Menge von benamten Einheiten beziehen kann, so daß eine Menge der einen Art, zu einer größeren Menge der entgegengesetzten Art hinzugesetzt, diese letztere nicht vergrößert, sondern vermindert, so wird die eine von beiden benamten Quantitäten als verneint und die andere als bejaht angesehen. Eine verneinte Größe setzt also allemal einen Begriff voraus, in Bezug auf welchen sie der bejahten entgegengesetzt ist. Z. B. 10 fl. 4 fl. sind allemal bejahte Größen; aber in Bezug auf den Begriff: Vermögen, können 10 fl. und 4 fl. in entgegengesetztem Sinne genommen werden. Das Entgegengesetzte von Vermögen ist Schulden; nämlich 4 fl. Schulden zu 10 fl. Vermögen hinzugesetzt, vermindern die letztere Quantität, so daß im Ganzen nur noch 6 fl. Vermögen bleiben. Man nennt daher 4 fl. Schulden auch 4 fl. verneintes Vermögen oder verneinte 4 fl. Vermögen. Das Verneintseyn oder das Negative geht nicht auf die 4 fl., weil sich nichts denken läßt, was den 4 fl. entgegengesetzt wäre, sondern auf den Begriff Vermögen. Die negative Bedeutung wird nun durch das Zeichen — ausgedrückt, weil es im Begriff des Negativen liegt, daß die negative Größe in Verbindung mit einer bejahten subtraktiv zu nehmen ist. Wenn bei irgend einer Untersuchung ein vorwärts genommener Weg als der positive angenommen wird, so ist der rückwärtsfallende negativ, insofern die Entfernung eines Körpers, der, von einem angenommenen Punkte aus, einen gewissen Weg vor- und dann wieder rückwärts macht, von diesem Punkte durch die Differenz beider Wege bestimmt wird, und zwar nicht blos der

Quantität, sondern auch der Lage nach. Hat er sich z. B. zuerst 15 Fuß vorwärts, und dann wieder 22 Fuß rückwärts bewegt, so ist seine Entfernung vom ersten Punkte vorwärts = 15 + (— 22) = — 7 Fuß; er hat sich — 7 Fuß vorwärts oder 7 Fuß rückwärts von demselben entfernt. Die Summe der von ihm wirklich durchlaufenen Wege ist 15 + 22 = 37 Fuße.

Hiernach können nun auch absolute Zahlen, ohne Bezug auf Einheiten bestimmter Art, als negativ ausgedrückt werden, insofern nämlich die absolute Zahl bejaht genommen einen Zuwachs bezeichnet. Dann bezeichnet die negativ ausgedrückte Zahl eine Abnahme. Das Entgegengesetzte von Zuwachs ist Abnahme; man nennt daher Abnahme verneinten oder negativen Zuwachs. Z. B. 8 + (— 5). Es ist keine Quantität denkbar, die der 5 entgegengesetzt wäre; wenn aber 5 oder + 5 einen Zuwachs bezeichnet, so giebt es einen entgegengesetzten Begriff, nämlich Abnahme oder verneinter Zuwachs. Der Ausdruck —5 ist also zwar nicht als verneinte Quantität, aber als verneinter Zuwachs denkbar, so daß 8 + (— 5) mit 8 — 5 ganz einerlei ist.

§. 4.

Beispiele zur Addition sind

1) $a + b$; 2) $a + (-b) = a - b$; 3) $5a + 7b + a + 2b + 3c + 6c = 6a + 9b + 9c$; 4) $7a + (-3b) + (-2a) + -(2b) + b = 5a + (-5b) + b = 5a + (-4b) = 5a - 4b$.

§. 5.

Eine Größe, die das verneinte Zeichen vor sich hat, von einer andern abziehen, heißt nach den festgesetzten Begriffen, sie als bejaht addiren.

z. B. $a - (-b) = a + b$. Es ist nämlich $a - (-b) = (a + b + [-b]) - (-b)$, aber $(-b) - (-b) = 0$, also $a - (-b) = a + b$. Ebenso

$$a - \frac{b - c}{d} = a - \left(\frac{b}{d} - \frac{c}{d}\right) = a - \frac{b}{d} - \left(-\frac{c}{d}\right)$$

$$= a - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}.$$

§. 6.

Ein Produkt zweier in Buchstaben ausgedrückten Zahlen, wie $a \times b$ oder $a . b$ drückt man auch ohne zwischengesetztes Zeichen ($\times$ oder $.$) schlechthin durch ab aus. So auch $a \times b \times c$ oder auch $a . b . c$ durch abc u. s. w.

Ebenso ist $a . (-b) = -ab$; $a . (-b) . c = -abc$.

Dergleichen einzelne verneinte Produkte absoluter Zahlen können als verneinte Quantitäten nicht vorkommen, oder sind, wenn sie als solche Ausdrücke vorkommen, undenkbar, und bezeichnen daher was Unmögliches. Sie sind nur als subtraktive Quantitäten möglich, also als Glieder einer zusammengesetzten Größe, wo solche von größeren Zahlen abzuziehen sind, so daß eine positive Quantität übrig bleibt. So ist -5 als für sich bestehende Quantität ohne Sinn, aber $7 + (-5)$ soviel als $7 - 5 = 2$.

Wo sich die Quantitäten auf Gegenstände bestimmter Art, auf benamte Größen, beziehen, hat es mit denselben eine etwas andere Bewandniß, welches besonders bei der Multiplikation zweier verneinter Faktoren bemerkt zu werden verdient.

Kommt nämlich, wo blos von abstrakten Zahlen die Rede ist, die Multiplikation $(-a) \times (-b)$ vor, so sind

diese Faktoren entweder ohne Sinn, oder sie müssen Glieder einer zusammengesetzten Größe seyn, z. B. $(A - a) \times (B - b)$, so daß $A > a$ und $B > b$ ist. Dann ist das Produkt $A . (B - b) + (-a) . (B - b)$. Hier ist das Produkt $- a . (B - b)$ subtraktiv; es soll die Differenz $B - b$ hier a mal von dem Produkt $A . (B - b)$ abgezogen werden, diesem geschieht dadurch Genüge, daß man zuerst das ganze Produkt $a . B$ abzieht, und dann das $a . b$, welches nicht hat abgezogen werden sollen, oder welches zuviel in Abzug gekommen ist, wieder addirt. Daher wird das gesammte Produkt $= A (B - b) + (- aB) + ab = AB - Ab - aB + ab$. Hierauf gründet sich der Satz, daß $(- a) \times (- b)$ allemal $= \times ab$ gesetzt werden müsse. Es kann daher in einer Zusammenstellung von additiven und subtraktiven Größen nie das Produkt zweier verneinten Faktoren verneint werden. Daher bleibt $\surd - 4$ allemal unmöglich. Als einzelne Quantität ist sie unmöglich, weil schon $- 4$ undenkbar ist; in der Zusammenstellung mit bejahten Größen ist sie unmöglich, weil sie weder $- 2$ noch $+ 2$ seyn könnte, indem sowohl $(+ 2) \times (+ 2)$ als $(- 2) \times (- 2)$ die positive Zahl $+ 4$ giebt; es würde also $\surd - 4$ und so überhaupt $\surd - a$ weder als additive, noch als subtraktive Quantität gelten können, daher sie gar keine Quantität bezeichnet.

In der Anwendung auf benamte Größen kann ein einzelnes Produkt wie $(- a) . (- b)$ eben so wenig vorkommen, als bei blos abstrakten Zahlen. Es ist nämlich die Multiplikation benamter Größen unter einander unmöglich, z. B. Schulden mit Schulden, Ellen mit Ellen u. dgl. Unter allen Faktoren eines Produkts kann daher nur ein einziger Faktor eine benamte Größe bezeichnen, alle übrigen müssen blos abstrakte Zahlen seyn. Da nun verneinte Quantitäten

unmöglich sind, so können mehrere verneinte Faktoren nur als Faktoren subtraktiver Glieder einer zusammengesetzten Größe vorkommen. Käme nun in einer zusammengesetzten Größe, z. B. $a\sqrt{-b}$ als Glied vor, so daß $-b$ eine verneinte benamte Größe bezeichnete, so wäre $\sqrt{-b}$ unmöglich, weil die Wurzel gleichfalls eine benamte Größe seyn müßte, welches unmöglich ist, weil sich eine benamte Größe als solche nicht mit sich selbst multipliciren läßt. Dasselbe gilt auch selbst von $a\sqrt{b}$. Es kann daher eine Größe unter einem Wurzelzeichen nie eine benamte Größe seyn, sondern nur eine abstrakte Zahl, welche blos eine Menge solcher Einheiten bezeichnet, auf welche sich ein Faktor außerhalb dem Wurzelzeichen bezieht. Demnach gilt auch von Ausdrücken, die sich auf benamte Größen beziehen, der Satz, daß $\sqrt{-b}$ allemal eine unmögliche Quantität bezeichnet.

Man darf daher den Ausdruck $a . \sqrt{-b}$ nie mit dem $-a . \sqrt{b}$ verwechseln. Wenn er verwechselt werden kann, so ist es ein Beweis, daß er eigentlich verwechselt werden muß, und daß vorher das Zeichen — unrichtig unter das Wurzelzeichen gesetzt war. Sagte z. B. Jemand, er habe 2000 fl. Vermögen und die Quadratwurzel aus 640000 fl. Schulden, und wollte dieses durch $2000 + \sqrt{-640000}$ ausdrücken, dann dieses $= 2000 - \sqrt{640000} = 1200$ setzen, so würde er mehrere Ungereimtheiten begehen. Die Quadratwurzel aus Schulden ist undenkbar, wohl aber kann die Quadratwurzel aus einer Zahl Menge von Schulden bezeichnen; weil nun, wenn Vermögen als das Bejahte angenommen wird, Schulden mit dem vorgesetzten Zeichen — zu bezeichnen sind, so muß die Wurzel aus der angegebenen Zahl das Zeichen — vor sich haben, und so ist also der ursprüngliche dem Sinne der Angabe angemessene Ausdruck der $2000 - \sqrt{640000}$; hingegen der $2000 + \sqrt{-640000}$ ist sinnlos.

§. 7.

Ausdrücke der Division sind, wie schon aus der numerischen Arithmetik bekannt ist, $\frac{a}{b}$ oder $a : b$, $\frac{a+b}{c}$, $(a+b) : c$; $\frac{a+b-c}{d}$, $(a+b-c) : d$; $\frac{a+b}{c-d}$ u. s. w. Statt $\frac{a+b-c}{d}$ läßt sich auch $\frac{a}{d} + \frac{b-c}{e}$ oder $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$ schreiben.

§. 8.

Ein Bruch kann nie einen verneinten Nenner oder Divisor haben. Z. B. in dem Ausdruck $\frac{12}{-3}$ läge kein Sinn. Er bezeichnet für sich einzeln genommen eine unmögliche Quantität, auch wenn -3 eine benamte Größe bezeichnen sollte, weil sich nur durch eine Zahl, nicht aber durch eine benamte Größe dividiren läßt. In Verbindung mit andern Gliedern kann ein solcher Bruch mit verneintem Nenner subtraktiv werden, so daß der ganze Ausdruck denkbar bleibt. Um dieses Subtraktive zu erkennen, muß man im Zähler und Nenner mit -1 multiplicieren oder die entgegengesetzten Zeichen nehmen. Man erkennt aus dem verneinten Nenner, daß man dem Bruch die verkehrte Form gegeben hat, und giebt ihm daher durch Umkehrung der Zeichen allemal die richtige Form. Statt $\frac{12}{-3}$ schreibt man $\frac{-12}{3} = -4$; statt $\frac{-12}{-3}$ setzt man $\frac{12}{3} = 4$. So auch $\frac{-a}{b}$ statt $\frac{a}{-b}$, $\frac{a}{b}$ statt $\frac{-a}{-b}$. Ein Ausdruck wie $\frac{a}{b-c}$ kann in dieser Form stehen bleiben, so lange nicht entschieden ist, daß $c > b$ sey; sobald dieses ent-

schieden ist, setzt man $\frac{-a}{c-b}$. Wäre der ursprüngliche Ausdruck $\frac{-a}{b-c}$, so setzt man, sobald $c > b$ wird, $\frac{a}{c-b}$.

§. 9.

Mehrere Brüche, und so auch ungebrochene Ausdrücke mit Brüchen, werden, wie in der gemeinen Arithmetik, auf einerlei Benennung gebracht. Z. B. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$;

$1 + \frac{b}{c} = \frac{c+b}{c}$; $1 + \frac{2b-3c}{c} = \frac{c+2b-3c}{c} = \frac{2b-2c}{c} = \frac{2(b-c)}{c}$; $a - \frac{2b+4ca}{2c} = \frac{2ca-2b-4ca}{2c} = \frac{-2.(b+ca)}{2c} = -\frac{b+ca}{c}$.

§. 10.

Oft lassen sich die Nenner der Brüche durch wirkliche Division ganz wegschaffen, z. B.

$$\frac{12ae+24be+6me+20af+40bf+10mf}{4a+8b+2m} = 3e+5f$$

$$\frac{aa-bb-2ad+dd}{a-b-d} = a+b-d.$$

Aber diese Reduktion eines Bruchs auf einen ungebrochenen Ausdruck setzt voraus, daß im Zähler und Nenner einerlei Buchstaben vorkommen.

§. 11.

Ein Produkt gleicher Faktoren heißt eine Potenz, zuweilen auch Dignität oder Potestät. Man kürzt den Ausdruck einer Potenz dadurch ab, daß man den gemeinschaftlichen Faktor nur einmal niederschreibt, dann aber oben zur Rechten die Zahl bemerkt, welche anzeigt, wievielmal der Faktor im Produkt vorkommen soll. Z. B. a^2 statt a a, a^3 statt a a a u. s. f. überhaupt a^n, wenn der Faktor a n mal im Produkt enthalten seyn soll. Die Zahl n wird der Exponent der Potenz genannt. Dieser muß also nach dem festgesetzten Begriffe allemal eine ganze bejahte Zahl seyn. Potenzen verneinter Größen mit geraden Exponenten sind nothwendig allemal bejaht.

§. 12.

Weil $a^2 . a^3 = aa \times aaa = a^5$, so hat man allgemein $a^m . a^n = a^{m+n}$. Ebenso $\frac{aaaaa}{aaa} = aa$ oder $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$. Ueberhaupt $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, wo aber m—n eine ganze bejahte Zahl seyn muß.

§. 13.

Auch hat man $(a^m)^4 = a^m . a^m . a^m . a^m = a^{m+m+m+m} = a^{4m}$, und überhaupt $(a^m)^n = a^{nm}$.

§. 14.

Ferner $(abc...)^2 = abc . abc = aa . bb . cc = a^2 b^2 . c^2$ und allgemein $(abc...)^m = a^m b^m c^m ...$; auch $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} . \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$, und $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

§. 15.

Hingegen sind Ausdrücke wie a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} u. s. f. für sich ohne Sinn, wenigstens in Bezug auf den (§. 11.) festgesetzten Begriff einer Potenz. Man kann sie aber als arithmetische Bezeichnungen von gebrochenen Ausdrücken gelten lassen, wenn wir sie ebenso wie Potenzen behandeln, und ihre eigentliche Bedeutung zuletzt durch andere arithmetische Bezeichnungen ausdrücken.

Es ist nämlich, wenn wir solche Ausdrücke wie Potenzen behandeln,

$$1)\ a^{-m} \times a^{m+n} = a^{m+n-m} = a^n$$

$$2)\ \frac{1}{a^m} \times a^{m+n} = \frac{a^{m+n}}{a^m} = a^n.$$

Wird also der Ausdruck a^{-m} wie jede andere Potenz behandelt, so ist sie mit $\frac{1}{a^m}$ völlig einerlei. Die Einheit mit a^{-m} multiplicirt, ist ebensoviel als die Einheit mit a^m dividirt. Das Entgegengesetzte der Zeichen der Exponenten deutet auf entgegengesetzte Rechnungsoperationen.

Daher ist auch $a^m \times a^{-m}$ oder a^{m-m} also a^0 einerlei mit $a^m \cdot \frac{1}{a^m}$ oder mit $\frac{a^m}{a^m}$, daher $a^0 = 1$.

§. 16.

Wenn a eine Zahl ist, deren nte Potenz = b wird, so wird a die nte Wurzel aus b genannt, die man durch $\sqrt[n]{b}$ ausdrückt. Nach diesem Begriffe ist also $\sqrt[n]{b} = a$, wenn

$a^n = b$ ist; ebenso $\sqrt[n]{b^m} = a$, wenn $a^n = b^m$ ist; auch ist $\sqrt{a}$ sowohl bejaht als verneint, und $\sqrt{-a}$ unmöglich (§. 6.). Nach dem Begriffe von einer Wurzel folgt also aus $\sqrt[n]{b^m} = a$ auch $a^n = b^m$ oder $(\sqrt[n]{b^m})^n = b^m$.

§. 17.

Bis hierhin galt immer noch die Voraussetzung, daß m und n ganze Zahlen seyn müssen. Behandelt man aber gebrochene Exponenten ebenso, wie ungebrochene, so wird auch

$$(b^{\frac{m}{n}})^n = b^{n \cdot \frac{m}{n}} = b^m \quad (§. 13.)$$

also (§. 16.)

$$(\sqrt[n]{b^m})^n = (b^{\frac{m}{n}})^n$$

und daher

$$b^{\frac{m}{n}} \text{ einerlei mit } \sqrt[n]{b^m}.$$

Wenn wir also $b^{\frac{m}{n}}$ wie jede andere ungebrochene Potenz behandeln, so ist solche mit $\sqrt[n]{b^m}$ völlig einerlei.

Demnach gilt alles, was von Potenzen mit ganzen bejahten Exponenten gilt, auch von Potentialausdrücken mit gebrochenen bejahten und verneinten Exponenten, wenn wir dabei bemerken, daß a^{-m} soviel ist als $\frac{1}{a^m}$, und $\sqrt[n]{a^m}$ soviel als $a^{\frac{m}{n}}$.

§. 18.

Viele sehr einfache Brüche lassen sich durch unendliche Reihen von Gliedern ausdrücken, die nach Potenzen so fort-

schreiten, daß sich das Gesetz des Fortgangs leicht erkennen läßt. Z. B.

$$\frac{x}{x+a} = 1 - \frac{a}{x+a} = 1 - \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x.(x+a)}$$

$$= 1 - \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} - \frac{a^3}{x^2.(x+a)}$$

$$= 1 - \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} - \frac{a^3}{x^3} + \frac{a^4}{x^3.(x+a)}$$

u. s. f.

Berechnet man im Quotient n Glieder, so erhält man

$$\frac{x}{x+a} = 1 - \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} - \frac{a^3}{x^3} + \frac{a^4}{x^4} - \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{a^{n-2}}{x^{n-2}} \mp \frac{a^{n-1}}{x^{n-2}.(x+a)}$$

Für $x = a = 1$ wird

$$\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots\ldots \pm 1 \mp \frac{1}{1+1}$$

Setzt man $-a$ statt $+a$, so wird

$$\frac{x}{x-a} = 1 + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \ldots\ldots + \frac{a^{n-2}}{x^{n-2}}$$

$$+ \frac{a^{n-1}}{x^{n-2}(x+a)}.$$

Zweites Kapitel.

Von Gleichungen überhaupt, und insbesondere von Auflösung der Gleichungen vom ersten und zweiten Grade.

---

§. 19.

Ein Ausdruck, welcher uns zu erkennen giebt, daß zwei Quantitäten, unter verschiedenen Formen dargestellt, gleich groß seyen, heißt eine **Gleichung**. Z.B. $2 . 12 = 3 . 8$; $\frac{48}{6} = \frac{32}{4}$; $\frac{64}{4} = 4 + 2 . 6$; $a + b = x - c$; $a - b\sqrt{x} = c + 3x^2$ u. s. f. Die Algebra lehrt uns mannichfaltige Formen von Gleichungen und ihre Natur kennen, und aus gegebenen Gleichungen zwischen bekannten und unbekannten Größen die unbekannten finden, d. i. gegebene Gleichungen auflösen. Hier theilen wir nur soviel davon mit, als zum Verständnisse der politischen Arithmetik nothwendig ist.

§. 20.

Eine Gleichung, in welcher nur die erste Potenz der unbekannten Größe vorkommt, heißt eine Gleichung vom ersten Grade. Eine solche, in welcher die zweite vorkommt, eine vom zweiten Grade, oder auch eine **quadratische**; eine **reine** quadratische, wenn **nur** die zweite vorkommt; eine **unreine**, wenn zugleich die erste darin vorkommt.

Beispiele von:

Gleichungen des ersten Grades,

$$3x + 4x - 100 = 5x + 25$$

$$ax + \frac{b}{c} - dx + \frac{x}{e} = fx - g + h$$

wo blos x unbekannt angenommen wird.

$$ax - \frac{b}{g} + \frac{f}{k} - \frac{x}{m} + y = cy - \frac{y}{d}$$

wo x und y unbekannt sind.

Gleichungen des zweiten Grades,

$$ax^2 - bx + g = cx^2 - dx - \frac{x}{h} + f \quad (☾$$

wo nur x unbekannt seyn soll.

$$ax^2 - by + cx - \frac{x}{d} = mx^2 + \frac{y^2}{n} - k + fx$$

Die allgemeine Form aller unreinen quadratischen Gleichungen ist

$$x^2 + bx = c \quad (\odot$$

wo b und c, wie man will, zusammengesetzt seyn können, immer aber aus nur bekannten Größen. Eine Gleichung, die sich nicht auf diese Form bringen läßt, ist keine unreine quadratische.

§. 21.

Faktoren, die mit einer unbekannten Größe multiplicirt sind, heißen Koefficienten der letztern. Steht kein Faktor neben derselben, so hat man sich den Faktor 1 als Koefficient zu denken. In $\odot$ ist der Koefficient von x^2 die 1, und der von x die b. Uebrigens können b und c auch verneinte Größen bezeichnen.

§. 22.

Wäre eine Gleichung von der Form

$$ax - \frac{b}{x} + c = dx - f$$

gegeben, so müßte man solche Veränderungen mit ihr vornehmen, wodurch die x aus dem Nenner weggeschafft würde, um zu beurtheilen, ob sie vom zweiten Grade sey. Dasselbe müßte mit einer Gleichung von der Form

$$a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} + d$$

oder mit der

$$a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} + dx.$$

geschehen.

Es müssen daher die hierzu erforderlichen Aenderungen gezeigt werden.

Anmerk. Faktoren unter einem Wurzelzeichen werden ohne Ausnahme als ein einziges Produkt angesehen, auf welches sich das Wurzelzeichen bezieht. Z. B. $\sqrt{ax}$ ist die Quadratwurzel aus dem Produkt ax. Soll das Produkt angedeutet werden, welches herauskommt, wenn $\sqrt{a}$ mit der x multiplicirt wird, so muß man $(\sqrt{a}) . x$ oder $x\sqrt{a}$ schreiben. Hingegen bezieht sich der Exponent, welcher bei irgend einem Faktor eines Produkts zur Bezeichnung einer Potenz steht, immer nur auf diesen Faktor. Z. B. ax^n ist einerlei mit $a \times (x^n)$. Soll die nte Potenz des Produkts ax ausgedrückt werden, so muß man $a^n x^n$ oder $(ax)^n$ schreiben.

§. 23.

Eine Gleichung heißt eine **bestimmte**, wenn in ihr nur eine unbekannte, wie x, vorkommt; eine **unbestimmte**, wenn in ihr 2, 3 oder mehr unbekannte Größen vorkommen,

§. 24.

Um eine Gleichung von der Form

$$ax + \frac{b}{x} - \frac{c}{y} + \frac{d - e}{x + z} = bv - \frac{k}{x} + \frac{fz - g}{y}$$

wo v, x, y, z unbekannte Größen seyn sollen, so zu verändern, daß keine unbekannte Größe in einem Nenner vorkommt, darf man nur alle Glieder mit dem Produkt aller verschiedenen Nenner multipliciren, dann statt der im Zähler und Nenner eines Bruchs vorkommenden gleichen Faktoren die 1 setzen.

Man erhält hierdurch, indem man hier mit $x . y . (x + z)$ multiplicirt,

$$ax^2 y . (x + z) + by . (x + z) - cx . (x + z) + (d - e) . xy$$
$$= bvxy . (x + z) - ky . (x + z) + (fz - g) . x . (x + z)$$

Dieselbe Regel gilt auch bei mehr oder weniger unbekannten Größen.

§. 25.

Eine Gleichung von der Form

$$a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} + dx$$

so umzuändern, daß die unbekannte x nirgends mehr unter einem $\sqrt{}$ stehe, bringe man die Wurzelgrößen zuerst auf eine Seite, indem man das Glied, welches sie zur Rechten enthält, auf beiden Seiten abzieht. Hierdurch wird

$$a\sqrt{x} - c\sqrt{x} - b = dx$$

Jetzt bringe man die Glieder (hier nur das $-b$), welche blos bekannte Größen enthalten, auch auf die rechte Seite, so wird

$$(a - c) . \sqrt{x} = dx + b$$

und nun auf beiden Seiten die 2te Potenz gemacht oder quadrirt, giebt

$$(a - c)^2 . x = d^2 x^2 + 2bd . x + b^2$$

welches eine unreine quadratische Gleichung ist.

§. 26.

Eine Gleichung von der Form

$$\frac{a}{\sqrt{x}} - \frac{b\sqrt{x}}{m+x} = cx - d$$

so zu verändern, daß die unbekannte x weder irgendwo im Nenner, noch unter einem $\sqrt{}$ vorkomme, darf man nur zuerst mit $(m + x)\sqrt{x}$, wie vorhin, multipliciren; dieses giebt

$$a . (m+x) - bx = (cx - d) . (m+x) . \sqrt{x}$$

und nun quadrirt giebt

$$a^2 (m+x)^2 + b^2 x^2 - 2ab (m+x) = (cx - d)^2 . (m+x)^2 . x$$

Werden die Potenzerhebungen und Multiplikationen überall wirklich vorgenommen, so erhält man eine Gleichung vom 5ten Grade.

§. 27.

Aufg. Eine Gleichung vom 1ten Grade, in welcher eine unbekannte Größe mit andern vermengt vorkommt, so zu verändern, daß diese unbekannte allein auf eine Seite der Gleichung zu stehen kommt.

Aufl. 1) Eine Gleichung vom 1ten Grade kann, nachdem die als unbekannt angenommene Größe aus den Nennern weggeschafft und von Wurzelzeichen befreit worden, nur unter folgender Form vorkommen:

$$Ax + Y + C = Bx + Z + D$$

wo Y und Z einen Inbegriff von Gliedern bezeichnen, welche andere unbekannte Größen außer der x enthalten, so daß auch unbestimmte Gleichungen hierunter mit begriffen sind.

2) Soll nun diese Gleichung so verändert werden, daß x allein auf einer Seite steht, so nehme man zur Rechten Bx und zur Linken Y + C weg; damit aber durch diese Aenderung die Gleichheit nicht aufgehoben werde, so nehme man die Größe Bx auch zur Linken und die Y + C auch zur Rechten weg. So erhält man

$$Ax - Bx = Z + D - (Y + C)$$

oder

$$(A - B) . x = Z + D - Y - C$$

Folglich

$$x = \frac{Z + D - Y - C}{A - B}$$

Anm. Käme eine Gleichung z. B. unter der einfachen Form x + C = D vor, wo nur x unbekannt wäre, so wäre solche unter obiger allgemeinen Form mit begriffen; dann wäre nämlich A = 1, Y = 0, B = 0, Z = 0, und die Gleichung wäre eine bestimmte.

§. 28.

Jede reine quadratische Gleichung ist unter der Form

$$Ax^2 + C = Bx^2 + D$$

begriffen. Sie läßt sich leicht so verändern, daß x allein auf eine Seite der Gleichung zu stehen kommt. Nämlich

$$Ax^2 - Bx^2 = D - C$$

oder

$$(A - B) . x^2 = D - C$$

also

$$x^2 = \frac{D - C}{A - B}$$

und

$$x = \sqrt{\frac{D - C}{A - B}}$$

§. 29.

Um eine unreine quadratische Gleichung so zu verändern, daß blos die unbekannte Größe auf eine Seite zu stehen komme, muß man erst die Natur des Quadrats einer zweitheiligen Größe näher kennen lernen.

Man findet aber durch wirkliche Multiplikation

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + \tfrac{1}{2} b)^2 = a^2 + ab + \tfrac{1}{4} b^2$$

also

$$a + \tfrac{1}{2} b = \sqrt{(a^2 + ab + \tfrac{1}{4} b^2)}$$

Ebenso

$$x + \tfrac{1}{2} m = \sqrt{(x^2 + mx + \tfrac{1}{4} m^2)}$$

Also wird jeder Ausdruck von der Form $x^2 + mx$ in ein vollständiges Quadrat einer zweitheiligen Größe $x + \frac{1}{2} m$ verwandelt, wenn man noch das 3te Glied $\frac{1}{4} m^2$, d. h. das Quadrat von der Hälfte des Koefficienten m addirt. Die Wurzel des so ergänzten Ausdrucks ist dann allemal $x + \frac{1}{2} m$.

§. 30.

Aufg. Jede unreine quadr. Gleichung von der Form $Ax^2 + Bx + C = Dx^2 + Ex + F$ aufzulösen.

Aufl. Man erhält

$$(A - D) x^2 + (B - E) . x = F - C$$

$$x^2 + \frac{B - E}{A - D} \cdot x = \frac{F - C}{A - D}$$

$$x^2 + \frac{B - E}{A - D} \cdot x + \left(\frac{B - E}{2.(A - D)}\right)^2 = \frac{F - C}{A - D} + \left(\frac{B - E}{2.(A - D)}\right)^2$$

Daher

$$x + \frac{B - E}{2.(A - D} = \pm \sqrt{\left(\frac{F - C}{A - D} + \left(\frac{B - E}{2.(A - D}\right)^2\right)}$$

und nun

$$x = -\frac{B - E}{2.(A - D)} \pm \sqrt{\left(\frac{F - C}{A - D} + \left(\frac{B - E}{2.(A - D)}\right)^2\right)}$$

Wird die Größe unter dem Wurzelzeichen verneint, so sind beide Werthe von x unmöglich.

Drittes Kapitel.

Von den arithmetischen und geometrischen Reihen.

§. 31.

Eine arithmetische Reihe heißt eine solche, deren Glieder nach gleichen Differenzen; eine geometrische eine solche, deren Glieder nach gleichen Quotienten fortschreiten.

Der allgemeine Ausdruck einer arithmetischen Reihe ist

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d \ldots\ldots a+(n-1).d$$

wo a das erste Glied, d die Differenz der Glieder und n die Anzahl der Glieder bezeichnet. d kann sowohl eine bejahte als eine verneinte Zahl bezeichnen; im erstern Falle ist die Reihe eine zunehmende, im letzteren eine abnehmende. Das letzte Glied einer arithmetischen Reihe wollen wir mit u, die Summe aller n Glieder mit S bezeichnen.

§. 32.

Die 5 Bestimmungsstücke a, n, d, u, S sind von der Art, daß sich allemal 2 aus den übrigen 3 bestimmen lassen. Man erhält daher zehen hierher gehörige Aufgaben.

I. Aus a, n, d die u und S zu finden.

Man erhält

1) $u = a + (n - 1) \cdot d$

2) $S = \frac{1}{2} n \cdot [2a + (n - 1) \cdot d]$

II. Aus a, u, d findet man

1) $n = 1 + \frac{u - a}{d}$

2) $S = \frac{u^2 - a^2 + (a + u) \cdot d}{2d}$

III. Aus u, n, d wird

1) $a = u + (1 - n) \cdot d$

2) $S = \frac{[2u + (1 - n) \cdot d] \cdot n}{2}$

IV. Aus a, u, S

1) $n = \frac{2S}{a + u}$

2) $d = \frac{u^2 - a^2}{2S - (a + u)}$

V. Aus u, d, S

1) $a = \frac{1}{2} d \pm \sqrt{[(u + \frac{1}{2} d)^2 - 2dS]}$

2) $n = \frac{2u + d \pm \sqrt{[8dS + (2u + d)^2]}}{2d}$

VI. Aus a, n, S

1) $u = \frac{2S - an}{n}$

2) $d = \frac{2 \cdot (S - an)}{n \cdot (n - 1)}$

VII. Aus u, n, S

1) $a = \frac{2S - un}{n}$

2) $d = \frac{2 . (un - S)}{n . (n - 1)}$

VIII. Aus n, d, S

1) $a = \frac{2S - n . (n - 1) . d}{2n}$

2) $u = \frac{n . (n - 1) . d + 2S}{2n}$

IX. Aus a, u, n

1) $S = \frac{(a + u) . n}{2}$

2) $d = \frac{u - a}{n - 1}$

X. Aus a, d, S

1) $n = \frac{d - 2a \pm \sqrt{[8 . dS + (2a - d)^2]}}{2d}$

2) $u = - \frac{1}{2}d \pm \sqrt{[2dS + (a - \frac{1}{2}d)^2]}$

§. 33.

Der allgemeine Ausdruck einer jeden geometrischen Reihe ist

$a, ea, e^2a, e^3a, e^4a \ldots \ldots e^{n-1}a$

Alle Buchstaben haben hier dieselbe Bedeutung wie bey den arithmetischen Reihen, nur bezeichnet hier e den Faktor, mit welchem jedes Glied der Reihe multiplicirt wird, um das nächstfolgende zu erhalten. Dieser heißt der Exponent der Reihe; er kann sowohl eine ganze Zahl oder ein uneigentlicher

Bruch als ein eigentlicher Bruch seyn, im erstern Falle ist die Reihe eine **zunehmende**, im letzteren eine **abnehmende**.

§. 34.

Auch hier giebt es 10 Aufgaben.

I. Aus a, e, n wird

1) $u = e^{n-1}a$

2) $S = \frac{e^n a - a}{e - 1}$

II. Aus a, e, u

1) $n = \frac{\log. u - \log. a}{\log. e} + 1$

2) $S = \frac{ue - a}{e - 1}$

III. Aus a, e, S

1) $n = \frac{l[(e-1) . S + a] - la}{le}$

2) $u = \frac{(e-1) . S + a}{e}$

IV. Aus a, u, S

1) $e = \frac{S - a}{S - u}$

2) $n = \frac{lu - la}{l(S - a) - l(S - u)} + 1$

V. Aus a, u, n

1) $e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$

2) $S = \frac{\left(u \cdot \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}\right) - a}{\left(\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}\right) - 1}$

VI. Aus u, e, n

1) $a = \frac{u}{e^{n-1}}$

2) $S = \frac{ue - \frac{u}{e^{n-1}}}{e - 1}$

VII. Aus e, n, S

1) $a = \frac{(e - 1) \cdot S}{e^n - 1}$

2) $u = \frac{e^{n-1} \cdot (e - 1) \cdot S}{e^n - 1}$

VIII. Aus e, u, S

1) $a = S + (u - S) \cdot e$

2) $n = \frac{lu - l(ue - Se + S)}{le} + 1$

IX. Aus a, n, S .... die u und e }
X. Aus u, n, S .... die a und e } zu finden.

Diese beiden letzteren Aufgaben übersteigen die Kräfte der Analysis.

Viertes Kapitel.

Von den Logarithmen.

§. 35.

Wir wollen nunmehr den allgemeinen Ausdruck der geometrischen Reihen mit dem einer arithmetischen vergleichen. Auf dieser Vergleichung beruht die Lehre von den Logarithmen.

$$\begin{array}{llllll} a & ea & e^2 a & e^3 a & \ldots\ldots & e^{n-1} a \\ b & b+d & b+2d & b+3d & \ldots\ldots & b+(n-1).d \end{array}$$

Für den besondern Fall, wo wir $a=1$ und $b=0$ setzen, erhält man folgende sehr einfache Zusammenstellung:

$$\begin{array}{lllllll} 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 & \ldots\ldots & e^{n-1} \\ 0 & d & 2d & 3d & 4d & \ldots\ldots & (n-1).d \end{array}$$

Die in diesen letztern Reihen stehenden Glieder der arithmetischen Reihe werden Logarithmen der zugehörigen Glieder der geometrischen genannt, was auch d und e für Zahlen seyn mögen.

So ist z. B.

$d = \log. e$, $3d = \log. e^3$, $(n-1).d = \log. e^{n-1}$

§. 36.

Jedes nte Glied der arithmetischen Reihe, was auch n bedeuten mag, ist der Logarithme vom nten Gliede der geometrischen oder $(n-1) . d = \log. e^{n-1}$.

Es ist aber $d = \log. e$, also

$$\log. e^{n-1} = (n-1) . \log. e$$

Daher auch

$$\text{I. } \log. e^m = m . \log. e$$

§. 37.

Es sey e^α irgend ein Glied der geometrischen Reihe, e^β ein anderes, e^γ ein drittes rc., so sind die zugehörigen Glieder der arithmetischen Reihe $\alpha . d$, $\beta . d$, $\gamma . d$ rc.

Jene Glieder der geometr. Reihe geben, mit einander multiplicirt, das Produkt $e^{\alpha + \beta + \gamma}$; die 3 Glieder der arithmetischen Reihe geben die Summe $(\alpha + \beta + \gamma) . d$, welches diejenige Zahl ist, welche in der arithmetischen Reihe unter dem Glied $e^{\alpha + \beta + \gamma}$ der geometr. Reihe stehen muß; es ist also $(\alpha + \beta + \gamma \ldots) . d$ der Logarithme von $e^{\alpha + \beta + \gamma}$

oder $\alpha . d + \beta . d + \gamma . d \ldots$ d. i. $le^\alpha + le^\beta + le^\gamma \ldots$ ist $= \log (e^\alpha . e^\beta . e^\gamma \ldots)$

d. h. Man findet den Logarithmen eines Produkts von Zahlen der geometrischen Reihe, wenn man die Logarithmen der einzelnen Faktoren zusammenaddirt.

Es ist also

$$\text{II. } \log (A . B . C . D \ldots) = lA + lB + lC + lD \ldots$$

§. 38.

Es sey $\frac{a}{b} = z$, so wird $a = bz$, also $la = lb + lz$ und $\log z = la - lb$, oder

$$\text{III. } \log\left(\frac{a}{b}\right) = la - lb$$

§. 39.

Es sey $\sqrt[m]{A} = x$, so ist $A = x^m$ und (36.) $lA = m \cdot \log x$, folglich $\log x = \frac{lA}{m}$, oder

$$\text{IV. } \log \sqrt[m]{A} = \frac{lA}{m}$$

In diesen 4 Gleichungen sind alle hierher gehörige logarithmische Bezeichnungen enthalten.

§. 40.

Die Logarithmentafeln, deren wir uns auf die Weise, wie wir in der Folge sehen werden, bedienen, sind zuerst von Henrich Brigg berechnet worden. Er nahm $e = 10$ und $d = 1$; diese Zahl e, deren Logarithme $= 1$ seyn soll, wird die Basis des Logarithmensystems genannt. Nach dem Briggischen System hat man also nachstehende zusammengehörige Reihen:

1	10	100	1000	10000	.....
0	1	2	3	4	.....

Hiernach sind also die
Logarithmen von Zahlen zwischen 0 und 1 Brüche
——— — —— — 10 u. 100 = 1 + Bruch
——— — —— — 100 u. 1000 = 2 + Bruch
——— — —— — 1000 u. 10000 = 3 + Bruch
——— — —— — 10000 u. 100000 = 4 + Bruch

Die ganze Zahl des Logarithmen heißt seine Charakteristik, der angehängte Decimalbruch seine Mantisse.

Um die Logarithmen von Zahlen zwischen 1 und 10, zwischen 10 und 100 u. s. w. zu berechnen, mußte Brigg solange mittlere geometrische und mittlere arithmet. Proportionalzahlen suchen, bis er endlich eine mittlere geometrische fand, die nicht mehr z. B. um 0,0000001 von der, für welche er den Logarithmen suchen wollte, verschieden war, so daß sie ohne merklichen Fehler für die gegebene Zahl selbst angenommen werden konnte. Die zugehörige arithmetische Proportionalzahl gab ihm den gesuchten Logarithmen. So fand er die Logarithmen aller Primzahlen, die ihm dann durch bloße Addition auch die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen gaben. Dieses außerordentlich mühsame Verfahren ist durch spätere Bereicherungen der Analysis sehr abgekürzt worden. Jetzt überheben uns die bereits berechneten Tafeln der Mühe, solche Tafeln von neuem zu berechnen.

§. 41.

Wenn wir die Logarithmentafeln nachschlagen, so finden wir

$$\log 1000 = 3{,}0000000$$
$$\log 1001 = 3{,}0004341$$
$$\log 1002 = 3{,}0008677$$

Hier bilden die Zahlen 1000; 1001; 1002 eine arithmetische Reihe, die zugehörigen Logarithmen können daher nicht auch eine arithmetische bilden, weil sonst die 1000, 1001, 1002 eine geometrische ausmachen müßten. Inzwischen ist doch 1001 sehr nahe $= \sqrt{1000 \,.\, 1002}$ oder die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 1000 und 1002; also 1000, 1001, 1002 sehr nahe auch eine geometrische Reihe, und es müssen daher die zugehörigen Logarithmen auch

sehr nahe eine **arithmetische** Reihe bilden. Eigentlich würden nämlich die Zahlen 3,0000000; 3,00043385; 3,0008677 eine genaue arithmetische Reihe bilden, so daß die mittlere 30004341 nur um 0,00000025 zu groß ist.

Denkt man sich daher eine arithmetische Reihe von 1000 bis 1001, z. B. 1000,1; 1000,2; 1000,3 . . . . 1001, so müssen die zu diesen Zahlen gehörigen Logarithmen noch viel weniger von einer arithmetischen Reihe abweichen, so daß man

$$\text{z. B. } \log 1000{,}3 = 3{,}0000000 + 0{,}3 . 0{,}0004341 = 3{,}00013023$$

setzen kann u. s. w., ohne um 0,0000001 zu fehlen.

Man kann daher, ohne um 0,0000001 zu irren, für Zahlen, die > 1000 sind, allemal annehmen:

Es verhalten sich die Differenzen der Zahlen, wie die Differenzen der Logarithmen, z. B.

$$(1001 - 1000) : (1000{,}3 - 1000) = (l\,1001 - l\,1000) : (l\,1000{,}3 - l\,1000)$$

oder allgemein:

I. Wenn A größer als 1000 und B zwischen A und A + 1 fällt, so ist

$$[(A+1)-A] : (B-A) = [l(A+1) - lA) : (lB - lA)$$

oder

$$1 : (B-A) = [l(A+1) - lA] : (lB - lA)$$

Die Regel de tri giebt das 4te Glied; bezeichnet man die so gefundene Zahl mit E, so hat man

$$lB - lA = E$$

$$\text{also } lB = E + lA$$

Auch umgekehrt:

II. $[l(A+1)-lA] : (lB-lA) = 1 : (B-A)$

Bezeichnet man das so berechnete 4te Glied mit Z, so hat man

$$B - A = Z$$

$$\text{also } B = Z + A$$

§. 42.

Nunmehr läßt sich mittelst der schon berechneten Logarithmentafeln der Logarithme von jeder Zahl, die nicht über 10000 hinausgeht, aber noch einen Decimalbruch zum Anhange hat, leicht berechnen. Z. B. log 13,5; log 123,7; log 7,345

Es ist

$$l\,13{,}5 = l\,\frac{135}{10} = l\,135 - l\,10 = l\,135 - 1$$

$$l\,123{,}7 = l\,\frac{1237}{10} = l\,1237 - 1$$

$$l\,7{,}345 = l\,\frac{7345}{1000} = l\,7345 - l\,1000 = l\,7345 - 3$$

Man sieht hieraus, daß für Fälle, wo die Zahlen nicht über 4 Ziffern hinausgehen, dergleichen Logarithmen ohne weitere Berechnungen sich geradezu aus den Tafeln ergeben, so daß man die Proportionen des vor. §., welche nur für Zahlen, die größer als 1000 sind, hinlängliche Schärfe geben, auch nur für Zahlen, die über 1000 hinausgehen, nöthig hat. Z. B. l 136,15; log 243,671; log 78,9653; log 3,59875 zu bestimmen.

Es ist

$$l\;136{,}15 = l\,\frac{1361{,}5}{10} = l\,1361{,}5 - 1$$

$$l\,243{,}671 = l\,\frac{2436{,}71}{10} = l\,2436{,}71 - 1$$

$$l\,78{,}9653 = l\,\frac{7896{,}53}{100} = l\,7896{,}53 - 2$$

$$l\,3{,}59875 = l\,\frac{3598{,}75}{1000} = l\,3598{,}75 - 3$$

Alle diese Logarithmen lassen sich nach vor. §. I. finden.

§. 43.

Auch die Logarithmen aller Zahlen über 10000, ohne und mit einem angehängten Decimalbruch, lassen sich nach §. 41. I. berechnen. Z. B. l 49536; l 98564; l 2246894; l 39685,17; l 264683,92.

Es ist

$$l\,49536 = l\,4953{,}6 \, . \, 10 = 1 + l\,4953{,}6$$

$$l\,98564 = l\,10 \, . \, 9856{,}4 = 1 + l\,9856{,}4$$

$$l\,2246894 = l\,1000 \, . \, 2246{,}894 = 3 + l\,2246{,}894$$

$$l\,39685{,}17 = l\,10 \, . \, 3968{,}517 = 1 + l\,3968{,}517$$

$$l\,264683{,}92 = l\,100 \, . \, 2646{,}8392 = 2 + l\,2646{,}8392$$

Alle diese Logarithmen ergeben sich aus §. 41. I.

§. 44.

So dienen nun auch die bisherigen Sätze, die Zahl, welche einem Logarithmen zugehört, mittelst der schon berechneten Tafeln so genau zu finden, als man verlangt. Sollte man z. B. die Zahlen, welche den Logarithmen 0,5736895; 0,2684325; 1,2473258; 2,6894762 zugehören, in den Tafeln aufsuchen, so wären die nächsten Zahlen, welche die Tafeln angeben, 3; 2; 17; 489. Man findet aber noch einen Decimalbruch hinzu, wenn man alle diese Logarithmen mit der Charakteristik 3 in den Tafeln aufsucht, dann aber soviele Decimalstellen von der nebenstehenden Zahl abschneidet, als

man Einheiten zu der Charakteristik des gegebenen Logarithmen addirt hat.

Es ist nämlich

0,5736895 = 3,5736895 — 3 = 3,5736895 — l 1000
= l 3747 — l 1000 = l 3,747

also 3,747 die zugehörige Zahl.

Ebenso

0,2684325 = 3,2684325 — 3 = 3,2684325 — l 1000
= l 1855 — l 1000 = l 1,855

also 1,855 die zugehörige Zahl.

Auf gleiche Weise

1,2473258 = 3,2473258 — 2 = l 1767 — l 100
= l 17,67

also 17,67 die zugehörige Zahl.

Und

2,6894762 = 3,6894762 — 1 = l 4891 — l 10
= 489,1

also 489,1 die zugehörige Zahl.

Diese Methode, die zugehörige Zahl mit einem angehängten Decimalbruch zu finden, ist aber nur bei Logarithmen anwendbar, deren Charakteristik kleiner als 3 ist.

§. 45.

Eine allgemein anwendbare Methode giebt §. 41. II. an die Hand. Z. B. die zu dem Logarithmen 2,6548327 gehörige Zahl mit hinlänglicher Genauigkeit zu finden.

Man verhalte sich zuerst so, als wäre 3,6548327 der gegebene Logarithme. Diesen findet man nicht genau in den

Tafeln, er fällt zwischen die Logarithmen von 4516 und 4517. Hier ist also

$$A = 4516 \text{ und } lA = 3{,}6547539$$
$$B \text{ unbekannt aber } lB = 3{,}6548327$$
$$A + 1 = 4517 \text{ und } l(A+1) = 3{,}6548501$$
$$l(A+1) - lA = 0{,}0000962$$
$$lB - lA = 0{,}0000788$$

also §. 40. II.

$$962 : 788 = 1 : (B - A)$$

Daher

$$B - A = \frac{788}{962} = 0{,}819$$

welches das obige Z ist.

Also $B = 0{,}819 + 4516 = 4516{,}819$.

Dieses wäre die zu 3,6548327 gehörige Zahl; also die zu 2,6548327 gehörige = 451,6819.

Fünftes Kapitel.

Das Interusurium und damit zusammenhängende Berechnungen; auch das Paktum antichretikum.

§. 46.

Wenn ein Kapital K zu α procent ausgeliehen wird und die Zinsen jedesmal wieder zum Kapital geschlagen werden, so wird aus K am Ende des

1ten Jahres $(1 + 0{,}01 \, . \, \alpha) \, . \, K = K'$.

2ten $(1 + 0{,}01 \, . \, \alpha) \, . \, K' = (1 + 0{,}01 \, . \, \alpha)^2 \, . \, K = K''$

3ten $(1 + 0{,}01 \, . \, \alpha) \, . \, K'' = (1 + 0{,}01 \, . \, \alpha)^3 \, . \, K = K'''$

⋮

nten . . . . $(1 + 0{,}01 \, . \, \alpha)^n \, . \, K$

Bezeichnen wir also das auf solche Weise am Ende des nten Jahres entstandene Kapital mit W, so wird

$$\text{I.} \quad W = (1 + 0{,}01 \, . \, \alpha)^n \, . \, K$$

oder, wenn man den Vergrößerungs-Exponent $1 + 0{,}01 \, . \, \alpha = e$ setzt,

$$\text{II.} \quad W = e^n \, . \, K \, .$$

Nach einfacher Zinsenrechnung wäre schlechthin

$$\text{III.} \quad W^* = K^* + n \, . \, 0{,}01 \, . \, \alpha \, . \, K^*$$

wo die Sternchen nur den Bezug auf einfache Zinsen anzeigen sollen. Statt III. hat man auch

$$\text{IV.}\quad W^* = [1 + n \cdot (e - 1)] \cdot K^*$$

Auch erhält man aus II. und IV.

$$\text{V.}\quad K = \frac{W}{e^n}$$

$$\text{VI.}\quad K^* = \frac{W^*}{1 + n \cdot (e - 1)}$$

§. 47.

Die Differenz W — K heißt das Interusurium für Zinsen von Zinsen. Die Differenz W* — K* das Interusurium für einfache Zinsen. Bezeichnet man also das Interusurium mit I, so hat man

$$\text{VII.}\quad I = W - \frac{W}{e^n} = \frac{e^n - 1}{e^n} \cdot W$$

$$\text{VIII.}\quad I^* = W^* - \frac{W^*}{1 + n \cdot (e - 1)} = \frac{n \cdot (e - 1)}{1 + n \cdot (e - 1)} \cdot W^*$$

§. 48.

Es ist daher auch

$$\text{IX.}\quad e = \sqrt[n]{\frac{W}{K}}$$

oder auch

$$1 + 0{,}01 \cdot \alpha = \sqrt[n]{\frac{W}{K}}$$

und

$$\text{X.}\quad \alpha = \left(\sqrt[n]{\frac{W}{K}} - 1\right) \cdot 100$$

Die Formeln II., V., IX. und X. lassen sich bequem logarithmisch ausdrücken:

$$\text{XI.} \quad \log. W = n \,.\, \log. e + \log. K$$

$$\text{XII.} \quad \log. K = \log. W - n \,.\, \log. e$$

$$\text{XIII.} \quad \log. e = \frac{\log. W - \log. K}{n}$$

Aus XIII. findet man

$$\text{XIV.} \quad n = \frac{\log. W - \log. K}{\log. e}$$

§. 49.

Die vorstehenden Sätze gelten von allen Größen, die jährlich um einen bestimmten aliquoten Theil zunehmen; z. B. von der Vergrößerung eines Waldbestandes (insofern solche nach dem erwähnten Gesetze erfolgt), von der Vergrößerung der Volksmenge in einem Staate u. dgl.

Z. B. In wieviel Jahren wird sich die jetzige Volksmenge K in einem Staate verdoppeln, wo jährlich $\frac{1}{30}$ K geboren werden und $\frac{1}{30}$ K sterben?

Man findet hier e = 1,00107; aus XIV. ist hier

$$n = \frac{\log 2K - \log K}{\log e} = \frac{\log 2}{\log 1{,}00107} = 648{,}3 \text{ Jahre.}$$

Die neuesten Angaben für England geben die dortige Verdoppelungszeit nur = 112 Jahre.

2. Ex. Die jetzige Volksmenge sey = K, die Anzahl der in diesem Lande jährlich Sterbenden = $\frac{1}{30}$ K; wieviele

müßten jährlich geboren werden, damit sich die Volksmenge in 200 Jahren verdoppele?

Antw. $\frac{1}{27,17} \cdot K$

3. Ex. Wenn ein Wald jetzt 8000 Klafter Holz enthielte, wie groß müßte der Vergrößerungs-Exponent seyn, wenn er in 10 Jahren gar nicht benutzt werden und in dieser Zeit um 6000 Klafter zunehmen sollte?

Antw. $e = 1,05756$

Auch läßt sich z. B. der Vergrößerungs-Exponent für die Volksmenge in einem Lande aus (XIII.) bestimmen, wenn man weiß, wie groß die Volksmenge K vor n Jahren war, und wie groß die jetzige Volksmenge W ist.

§. 50.

Fällt mir am Ende des mten Jahres eine ewige Revenüe $= b$ zu, so ist der gegenwärtige Kapitalwerth derselben

Für Zinsen von Zinsen:

$$\text{XV.} \quad K = \frac{b}{(e-1) \cdot e^{m-1}}$$

Für einfache Zinsen:

$$\text{XVI.} \quad K^* = \frac{b}{(e-1) \cdot [1 + (m-1) \cdot (e-1)]}$$

Anwendungen dieser Formeln ergeben sich auch bei Forsttaxationen.

Zur Erleichterung aller dieser Berechnungen dienen die am Ende beigefügten Tafeln I. und II.

§. 51.

Ein Kapital K bringt jährlich Zinsen von Zinsen, und der Vergrößerungs-Exponent ist e; am Ende eines jeden Jahres soll von dem so veränderten Kapital die unveränderliche Summe b weggenommen werden: man soll die Größe des aus K nach n Jahren entstehenden Kapitals W bestimmen.

Aufl. Aus Betrachtung der geometrischen Reihen giebt sich

$$W = e^n K - (1 + e + e^2 + e^3 \ldots\ldots + e^{n-1}) . b$$

oder

$$\text{XVII.} \quad W = e^n K - \frac{e^n - 1}{e - 1} . b$$

§. 52.

Eben hieraus wird auch

$$\text{XVIII.} \quad K = \frac{(e-1) . W + (e^n - 1) . b}{(e-1) . e^n}$$

und

$$\text{XIX.} \quad n = \frac{l[(e-1) . W - b] - l[(e-1) . K - b]}{le}$$

§. 53.

Der Werth von e läßt sich nur näherungsweise bestimmen. Setzt man $\frac{W + nb}{K} = \varepsilon$, so ist beiläufig

$$\text{XX.} \quad e = \frac{(\varepsilon - 1) . b}{\varepsilon K - W} + 1$$

Setzt man den so gefundenen Werth von $e = \varepsilon^1$, so wird noch genauer

$$\text{XXI.}\quad e = \frac{(\varepsilon^1 - 1) \, . \, b}{\varepsilon^1 K - W} + 1$$

Diese Formel dient dem Forstmanne zur Benutzung seiner Beobachtungen, um Bestimmungen des Vergrößerungs-Exponenten für einen Waldbestand daraus herzuleiten. Soll b bestimmt werden, so hat man

$$\text{XXII.}\quad b = \frac{(e - 1) \, . \, (e^n K - W)}{e^n - 1}$$

Anm. Wenn ein Ganzes K, aus welchem nach n Jahren bei der jährlichen Abgabe b ein Ganzes W wird, nicht aus gleichartigen Theilen besteht, so hängt das Wachsthum, also der Werth von W, zugleich von der besondern Art der in die Ausgabe fallenden Theile, welche die Summe b ausmachen, ab. In solchen Fällen kann die Bestimmung von W sehr schwierig werden. Ein hierher gehöriger Fall, welcher die Bevölkerung betrifft, wird unten vorkommen.

§. 54.

Wenn die Abgabe b die einjährigen Zinsen von K übersteigt, so muß das Kapital K von Jahr zu Jahr abnehmen, oder nach n Jahren $W < K$ seyn, und es giebt einen Werth von n, für welchen $W = 0$ wird. Für diesen Fall wird aus XVIII.

$$\text{XXIII.}\quad K = \frac{(e^n - 1) \, . \, b}{(e - 1) \, . \, e^n}$$

$$\text{XXIV.}\quad n = \frac{\log b - \log \left[b - (e - 1) \, . \, K \right]}{\log e}$$

$$\text{XXV.}\quad b = \frac{(e - 1) \, . \, e^n}{e^n - 1} \, . \, K$$

§. 55.

Setzt man in XVII. + b statt — b, so erhält man den Werth eines Kapitals W, welches nach n Jahren aus dem K entsteht, wenn jährlich noch eine bestimmte Revenüe b hinzukommt und alles mit Zinsen von Zinsen benutzt wird. Nämlich

$$\text{XXVI.} \quad W = e^n K + \frac{e^n - 1}{e - 1} \cdot b$$

Für K = 0 wird

$$\text{XXVII.} \quad W = \frac{e^n - 1}{e - 1} \cdot b$$

§. 56.

Es könnte hier noch folgende Frage vorkommen:

Von einem Kapital K sollen m Jahre lang blos die Zinsen bezahlt werden, nachher aber am Ende des m + 1ten Jahres außer den Zinsen die Summe b, am Ende des m + 2ten Jahres wieder die Zinsen des restirenden Kapitals nebst derselben Summe b u. s. f. Was hat man nach dem mten Jahre von Jahr zu Jahr zu zahlen, und wann ist die ganze Schuld getilgt?

Setzt man $(e - 1) . K + b = z$, so beträgt die Zahlung am Ende eines m + nten Jahres $z - (n - 1) . (e - 1) . b$. Soll nun am Ende des Nten Jahres die letzte Zahlung geschehen, so daß dadurch der bleibende Rest = 0 wird, so hat man $N = \frac{K}{b}$

Bey Abtragung der Staatsschulden, bei Ankaufung von Gütern, von Waldungen u. dgl., wo auf künftige Benutzun-

gen mit Rücksicht zu nehmen ist, findet man Gelegenheit zu mannichfaltigen Anwendungen der letzten §§. Dabei kommt die angehängte III. Tafel zu statten.

§. 57.

Man hat 2 Kapitalien A und B, das A zu α und das B zu β p. C. jährlich zu verzinsen; beide sollen in gleichen Posten, zuerst A dann B, innerhalb n Jahren abbezahlt werden; während dem aber an A abgetragen wird, bleibt B, und es sollen während jener Abtragung die Zinsen von B alljährlich besonders entrichtet werden. Wieviel muß man alljährlich mit Inbegriff der Zinsen wegen des Kapitals A (außer den Zinsen von B) bezahlen?

Man setze, das Kapital A werde in x Jahren abgetragen, die jährlich abzutragende Summe sey $= a$, so ist die Frage: Wie groß muß a seyn, damit A mit Rücksicht auf die Zinsen in x Jahren abgetragen werde? Man findet aus obigen Formeln

$$a = \frac{0{,}01 \cdot \alpha \cdot (1 + 0{,}01 \cdot \alpha)^x}{(1 + 0{,}01 \cdot \alpha)^x - 1} \cdot A$$

Während dem jährlich a bezahlt wird, muß nun auch $0{,}01 \cdot \beta \cdot B$ für die Zinsen von B bezahlt werden; es ist also x Jahre lang die jährliche Zahlung $= a + 0{,}01 \cdot \beta \cdot B$.

Am Ende des $x + 1$ten Jahres soll nun dieselbe Summe a jährlich zum Abtragen des Kapitals B verwendet werden, das also innerhalb $n - x$ Jahren abgetragen seyn muß. Man hat also auch

$$a = \frac{0{,}01 \cdot \beta \cdot (1 + 0{,}01 \cdot \beta)^{n-x}}{(1 + 0{,}01 \cdot \beta)^{n-x} - 1} \cdot B$$

Folglich

$$\text{XXVIII.}\quad \frac{0{,}01 \,.\, \alpha \,.\, (1 + 0{,}01 \,.\, \alpha)^x}{(1 + 0{,}01 \,.\, \alpha)^x} \,.\, A$$

$$= \frac{0{,}01 \,.\, \beta \,.\, (1 + 0{,}01 \,.\, \beta)^{n-x}}{(1 + 0{,}01 \,.\, \beta)^{n-x} - 1} \,.\, B$$

wo sich x nur näherungsweise finden läßt.

§. 58.

Der Fall sey wie vorhin, nur wird noch verlangt, es soll, wenn wir während der Abtragung das Kapitals A die fortlaufenden Zinsen von B mit z bezeichnen, die gesammte jährliche Zahlung sowohl während den x Jahren, welche zur Abtragung der Schuld A erfordert werden, als während den nachfolgenden n — x Jahren, in welchen B abgetragen wird, einerlei Summe betragen.

Jetzt hat man

$$\text{XXIX.}\quad \frac{0{,}01 \,.\, \alpha \,.\, (1 + 0{,}01 \,.\, \alpha)^x}{(1 + 0{,}01 \,.\, \alpha)^x - 1} \,.\, A + z$$

$$= \frac{0{,}01 \,.\, \beta \,.\, (1 + 0{,}01 \,.\, \beta)^{n-x}}{(1 + 0{,}01 \,.\, \beta)^{n-x} - 1} \,.\, B$$

Jetzt wird x etwas größer als vorhin, und muß wieder wie vorhin näherungsweise gesucht werden.

§. 59.

Man will künftig jährlich eine bestimmte Summe = a zurücklegen, bis man mit Inbegriff der einfachen Zinsen zu α p. C. ein Kapital A zusammengebracht hat. Wielange muß die Summe a zurückgelegt werden?

Die gesuchte Anzahl von Jahren sey = n, so ist

$$\text{XXX.}\quad n = -\frac{1 - 0{,}005 \cdot \alpha}{0{,}01 \cdot \alpha} + \sqrt{\left(\frac{2A}{0{,}01 \cdot \alpha a} + \left(\frac{1 - 0{,}005 \cdot \alpha}{0{,}01 \cdot \alpha}\right)^2\right)}$$

und

$$\text{XXXI.}\quad a = \frac{A}{[1 + 0{,}005 \cdot (n-1) \cdot \alpha] \cdot n}$$

§. 60.

Nach N Jahren fällt mir ein Kapital W zu, das ich n Jahre lang genießen soll; dann soll ich einen Theil davon = w zurückgeben und den Rest zum ewigen Eigenthum behalten. Man soll den gegenwärtigen Werth K von allem, was mir zufällt, bestimmen.

Aufl. Es kommt hier und in ähnlichen Fällen immer darauf an, daß man die auf ein durch die Aufgabe bestimmtes letztes Jahr reducirten Werthe einander gleich setzt, wie es die Gleichheit des beiderseitigen Genusses erfordert. So erhält man hier die allgemeine Gleichung

$$e^n W - w = e^{N+n} \cdot K$$

und

$$\text{XXXII.}\quad K = \frac{e^n W - w}{e^{n+N}}$$

$$\text{XXXIII.}\quad W = \frac{e^{N+n} \cdot K + w}{e^n}$$

$$\text{XXXIV.}\quad w = e^n \cdot W - e^{N+n} \cdot K$$

$$\text{XXXV.}\quad n = \frac{\log w - \log (W - e^N \cdot K)}{\log e}$$

§. 61.

Gelegenheit zur Anwendung vorstehender Sätze giebt besonders das Paktum antichretikum oder der antichretische Vertrag, nach welchem man gegen ein gewisses Kapital K, das nicht wieder zurückgegeben werden soll, einem Andern den Genuß eines nutzbaren Pfandes so lange überläßt, bis derselbe gegen das erwähnte Kapital mit allen Zinsen vollkommen entschädigt ist. Ist der Werth des Guts zu Kapital angeschlagen = W, sein jährlicher Ertrag b, und soll dieses Gut W dem Andern N Jahre nach geschehenem Vorschusse des Kapitals K übergeben werden, so daß der Ertrag b am Ende des N + 1ten Jahres zum erstenmal in Anschlag kommt, so hat man aus (XXXV.)

$$\text{XXXVI.}\quad n = \frac{\log b - \log\,[b - (e - 1) \,.\, e^{N} \,.\, K]}{\log e}$$

Hier wird nämlich $w = W$, und $W = \frac{b}{e - 1}$

§. 62.

Es ist mir eine Rente R angewiesen, die ich nach n Jahren zum 1ten mal, nach n + n′ Jahren zum 2ten mal, nach n + 2n′ Jahren zum 3ten mal u. s. f. benutzen soll. Wie hoch läßt sich diese Rente, im Durchschnitt genommen, alljährlich anschlagen, wenn sie m mal ausbezahlt werden soll?

Es sey b eine alljährliche Rente, welche mit der Rente R, die nur alle n′ Jahre entrichtet wird, völlig äquivalent sey, so findet man

$$\text{XXXVII.}\quad b = \frac{(e - 1) \,.\, (e^{mn'} - 1) \,.\, R}{(e^{n + (m - 1) n'} - 1) \,.\, (e^{n'} - 1)}$$

Den gegenwärtigen Kapitalwerth K dieser Rente R giebt die Formel

$$\text{XXXVIII.}\quad K = \frac{(e^{mn'} - 1) \, . \, R}{(e^{n'} - 1) \, . \, e^{n + (m-1) n'}}$$

§. 63.

Man will für ein Kapital K eine jährliche Rente R kaufen, die nach x Jahren m Jahre lang ausbezahlt werden soll; nämlich im x + 1ten Jahre zum 1ten mal, im x + mten J. zum mten und letztenmal; K, R und m sind gegeben, man soll x finden.

Setzt man $\frac{K}{R} = p$, so ergiebt sich

$$\text{XXXIX.}\quad x = \frac{l\,\frac{e^m - 1}{e - 1} - l p}{l e} - m$$

Ist die ganze Anzahl von Jahren x + m = N gegeben, so wird

$$\text{XL.}\quad l\,(e^m - 1) = N \, . \, le + lp + l\,(e - 1)$$

Die zugehörige Zahl heiße μ, so ist $e^m - 1 = \mu$, also

$$\text{XLI.}\quad m = \frac{l\,(\mu + 1)}{e}$$

In der Anwendung dient die III. Tafel zur Erleichterung solcher Berechnungen.

Sechstes Kapitel.

Gesetze der Mortalität und der Bevölkerung.

§. 64.

Die unten beigefügte IV. Tafel ist mit der aus den Süßmilchischen Beobachtungen abgeleiteten, welche man bei Florencourt (Abhandl. aus juristischen und politischen Rechenkunst) S. 276 findet, einerlei, einige dort befindliche Rechnungsfehler bei Seite gesetzt, die indeß für das Ganze unbedeutend sind, da dergleichen Tafeln doch überhaupt nicht als völlig scharfe Resultate gelten können. Hierzu nur einige gedrängte Bemerkungen:

I. Die Anzahl der Lebenden über 100 Jahren verdient wenig Rücksicht.

II. Jede Zahl der 3ten Kolonne ist die Summe der neben ihr stehenden mit allen darüber stehenden, bis zum höchsten Alter, in der 2ten Kolonne. Diese Konstruktion der Tafel hat zur Folge, daß sie schlechterdings nur für den Beharrungsstand einer Volksmenge paßt.

III. Die 4te Kolonne ist durch Summirung der Zahlen der 3ten Kolonne entstanden, und paßt daher nach der Ueberschrift gleichfalls nur für den Beharrungsstand.

IV. Da in großen Städten jährlich mehr sterben, als geboren werden, auf dem Lande aber die Sache sich umgekehrt verhält, so läßt sich fragen, was der Umstand, daß diese Tafel nur auf den Beharrungsstand passe, für einen Einfluß auf ihre Brauchbarkeit haben könne?

Daß in großen Städten mehr sterben als geboren werden, und auf dem Lande umgekehrt, ist eine richtige Beobachtung. Daraus zieht Florencourt den ganz gewöhnlichen Schluß, daß die Mortalität in den Städten bedeutend größer sey, als auf dem Lande, und weiß sogar die Gründe in der verschiedenen Lebensweise der Städter und der Bewohner auf dem Lande zu suchen. Ich möchte dagegen fragen:

Wo ist mehr versperrte und verdorbene Luft, als in den Wohnungen des Landmanns, zumal im Winter? Der Landmann öffnet nie seine Fenster, heizt weit stärker ein, als der Städter, hat niedrigere Stuben, wo Mund und Nase immer die ungesundeste Luft einathmen. So eingekerkert verleben Familien, die den Sommer über an die reine freie Luft gewöhnt waren, den Winter in einem höchst verdorbenen Dunstkreise. Aus der größten Kälte kehrt der Landmann in seine heise Stube zurück, und wählt seinen Platz so nahe als möglich am heisen Ofen. Eben so unbesorgt geht er aus der heisesten Stube in die kalte Scheune, in seine Stallungen, oder in die Stadt, oder in den benachbarten Ort zum Beamten, zum Pfarrer, zur Kirche u. s. w.

Es ist kaum begreiflich, daß eine solche Lebensweise nicht alles wegrafft, zumal wenn man die widersinnige Behandlung der Kranken auf dem Lande nur einigermaßen kennt. Der Arzt ist für den Landbewohner so gut als gar nicht vorhanden. Der Vorwurf einer

minder gesunden Nahrung beim Städter ist ganz ungegründet. Und wer den häufigen Gebrauch hitziger Getränke auf dem Lande bezweifelt, muß die Lebensweise auf dem Lande und insbesondere in den Branntweinschenken der Dörfer gar nicht kennen.

So gerne ich daher auch die Erfahrung anerkenne, daß in den großen Städten die Zahl der jährlich Sterbenden größer, hingegen auf dem Lande kleiner ist, als die der jährlich Gebornen, so wenig kann ich die Gründe einer größeren Mortalität in Städten gelten lassen. Ungeachtet jener Erfahrung kann ich das Maaß der Sterblichkeit in den großen Städten nicht bedeutend größer als auf dem Lande annehmen. Ein einziger Umstand giebt von jener Erfahrung vollständige Rechenschaft, der Umstand,

> daß nicht alle, die in großen Städten sterben, auch darin geboren sind, daß also ein Theil der Sterbenden in den Todtenlisten solcher Städte vorkommt, den man nicht im städtischen Verzeichnisse der Gebornen findet.
>
> Auf dem Lande ist es umgekehrt: ein beträchtlicher Theil derer, die auf dem Lande geboren sind, stirbt nachher in den Städten. Dieser Theil wird also in die Geburtslisten auf dem Lande eingetragen, kommt aber nachher nicht in die dortigen Sterbelisten.

Da dieser Umstand allein schon hinreichend ist, das anscheinende größere Maaß der Sterblichkeit in den großen Städten zu erklären, so beweißt Florencourt eigentlich zuviel, und es wird hiermit bewiesen, daß das wahre Maaß der Sterblichkeit in den großen Städten von dem in den kleinen und auf dem Lande wenig abweichen kann.

Ebendarum begreift man aber auch, daß weder aus den alleinigen Listen großer Städte, noch aus den alleinigen der

Landbewohner ein richtiges Sterblichkeitsmaaß abgeleitet werden könne. Man kommt aber der Wahrheit nahe genug, wenn man die Resultate beider Listen so benutzt, daß man ⅔ aller Einwohner für das Land und ⅓ für die Städter annimmt. Hiernach ist nun auch die 2te Kolonne der IV. Tafel konstruirt; das Resultat weicht aber sehr von den Angaben ab, die man bei Florencourt S. 66 findet. Er merkt nämlich an, daß nach Süßmilchs gesammelten Beobachtungen

in 1056 Dörfern der Kurmark Einer von 40
in Berlin . . . . Einer von 28
in kleinen Städten . . . . Einer von 32
in ganzen Ländern . . . . Einer von 35 bis 36

jährlich sterbe.

Er giebt aber die IV. Tafel die gesammte Volksmenge, aus welcher jährlich 10000 sterben, zu 293640 an.

Hiernach müßte also im Anschlag für ganze Länder, und namentlich für die (vormalig-) preußischen Staaten, jährlich

$$\text{Einer von } \frac{293640}{10000} \text{ oder von } 29{,}364$$

sterben, ein Resultat, das mit vorstehenden Angaben sehr im Widerspruche steht.

Der Grund dieses von Florencourt selbst nicht bemerkten Widerspruchs liegt darin, daß die Konstruktion der 3ten und 4ten Kolonne obiger Tafel so beschaffen ist, wie sie es für den Beharrungsstand seyn müßte. Nur wo dieser statt fände, könnte man das Resultat gelten lassen:

Eine Volksmenge, aus der jährlich 10000 Glieder sterben, besteht aus 293640 Gliedern.

Aber in Europa, und namentlich in jenen preußischen Staaten, wäre es unrichtig, für 10000 Geborne auch 10000 Sterbende anzunehmen. Man wird daher richtiger sagen:

> Die 3te Kolonne zeigt für jedes Alter die Summe der von diesem Alter und höheren Jahren jährlich Sterbenden, für eine Volksmenge, aus welcher jährlich 10000 sterben

> Die Summe der Lebenden giebt sie für jedes nebenstehende Alter nur unter der Voraussetzung an, daß jährlich auch 10000 geboren werden.

In dem Verhältnisse also, in welchem die Zahl der Gebornen größer als 10000 ist, in demselben Verhältnisse müssen alle Zahlen der 3ten Kolonne vergrößert werden, wenn sie die Summe der von jedem nebenstehenden Alter Lebenden bezeichnen sollen. Nun ist für 1056 Brandenburgische Dörfer

Zahl der Sterbenden : Zahl der Gebornen = 3 : 4

und für Berlin

Zahl der Sterbenden : Zahl der Geb. = 28,9 : 28

Nimmt man also von 30000 Sterbenden 10000 für Berlin und 20000 für die Bewohner auf dem Lande, so werden

gegen 20000 Sterbende auf dem Lande geboren $\frac{4 \cdot 20000}{3}$

10000 Sterbende in Berlin geboren $\frac{28 \cdot 10000}{28,9}$

Es kommen also im Durchschnitt

gegen 30000 Sterbende $\frac{80000}{3} + \frac{2800000}{289} = 36354$

oder:

Gegen 10000 Sterbende werden 12118 geboren.

Hieraus ergiebt sich nun die Beantwortung der hier No. IV. am Anfange vorgelegten Frage.

Sollen nämlich die Zahlen der 3ten Kolonne nicht auf den Beharrungsstand, sondern auf den wirklichen Bestand der Volksmenge gehen, aus welcher jährlich 10000 sterben, so kommt man der Wahrheit nahe genug, wenn man alle Zahlen der 3ten Kolonne mit 1,2118 multiplicirt. Die Tafel wird hierdurch hinlänglich rektificirt. S. No. VI.

V. Die 4te Kolonne ist durch Summirung der Zahlen aus der dritten entstanden. Ihre Rektifikation geschieht durch die Multiplikation mit 1,2118.

VI. Für den gewöhnlichen Zustand einer wachsenden Volksmenge ist also, wenn jährlich 10000 sterben, die Anzahl aller Lebenden, oder die gesammte Volksmenge

nicht 293640, sondern 1,2118 . 293640
= 355834

so daß jährlich Einer von 35,5834 stirbt, welches mit der wirklichen Beobachtung für ganze Länder (vorher No. IV.) trefflich zusammenstimmt.

VII. Es giebt aber auch jede Zahl der 4ten Kolonne zugleich die Summe von Jahren an, welche sämtliche Lebende desselben Alters (der 3ten Kol.) zusammen noch zu durchleben haben. Dividirt man daher die Zahlen der 4ten Kolonne durch die der 3ten, so kommen die Zahlen der 5ten Kol. heraus, welche die **mittlere Lebensdauer** bezeichnen.

VIII. Die **wahrscheinliche** Lebensdauer ergiebt sich für jeden Einzelnen von gegebenem Alter durch Aufsuchung desjenigen Lebensjahres, in welchem in der 3ten Kol.

nur noch die Hälfte jener Summe übrig ist, die von dem gegebenen Alter nach der 3ten Kol. lebt. Hierauf beruht die Konstruktion der 6ten Kolonne.

§. 65.

Das Maaß der Bevölkerung ist für beiderlei Geschlechter nicht ganz einerlei, nur ist der Unterschied so groß nicht, als Florencourt, durch einen Fehlschluß verleitet, ihn angiebt. Aus Betrachtung der V. und VI. Tafel folgert er:

> Die Summe aller Lebenden vom männlichen Geschlecht verhalte sich zu der vom weiblichen wie 286903 zu 299872 oder wie 100 zu 104,5.

Aber nach ebendiesen Tafeln sterben jährlich 10000 von 286903 männlichen und nur 10000 von 299872 weiblichen Geschlechts. Für den Beharrungsstand würden also aus denselben Mengen auch 10000 männlichen nnd 10000 weiblichen Geschlechts geboren. Also folgt:

> Wo jährlich 10000 männlichen und 10000 weiblichen Geschlechts geboren werden, da verhält sich die Summe der Lebenden männl. Geschlechts zu der des weiblichen wie 100 zu 104,5.

Jetzt kommt es aber erst noch auf die richtige Angabe des Verhältnisses der Gebornen männl. Geschlechts zu dem des weiblichen an, welches in einem Lande wirklich statt findet. Wäre dieses wie 104,5 zu 100, so wäre die Summe der Lebenden von beiden Geschlechtern in einem solchen Lande gleich groß.

Setzt man dieses Verhältniß allgemein wie $m : w$, so daß jährlich m männlichen gegen w weiblichen Geschlechts geboren werden, so wäre

die Summe aller Lebenden männl. Geschlechts zur Summe aller Lebenden weibl. Geschl. wie m. 286903 zu w. 299872 oder wie m. 100 : w. 104,5.

Eine der neuesten hierher gehörigen Schriften ist:

Statistical Account the Population and Cultivation, Produce and Consumtiou of England and Wales by Benjamin Pitts Capper. London by Kearsley 1801.

Aus der mir von dieser Schrift, die ich selbst nicht besitze, zu Gesicht gekommenen kurzen Anzeige finde ich für das J. 1800

die Summe der Lebenden männl. Geschlechts zu der des weiblichen beiläufig wie 100 : 104,24 und hieraus m : w = 10000 : 9975.

§. 66.

In Teutschland scheint der umgekehrte Fall einzutreten. Hierhergehörige Beobachtungen hat uns Güte, Prof. d. Theol. in Halle, in einer kleinen Schrift mitgetheilt. Nach dessen Angaben finde ich für Halle die Summe der Gebornen männl. Geschlechts zu der des weiblichen wie 106 zu 100.

Bezeichnet man nun die Summe aller Lebenden männl. Geschlechts mit M, die des weibl. mit W, so finden wir nach vor. §.

$$M : W = m.100 : w.104{,}5 = 106.100 : 100.104{,}5$$
$$= 100 : 98{,}6.$$

Der Nachtrag zu den Mortalitätslisten (unten die letzte Tafel) giebt für eine beträchtliche Anzahl vormalig preußischer Provinzen

die Anzahl der Gebornen männl. Geschlechts zu der des weiblichen wie 105,63 : 100.

Hiernach also wie vorhin

$$M : W = 105{,}63 \,.\, 100 : 100 \,.\, 104{,}5$$
$$= 100 : 98{,}93.$$

Man wird daher für Teutschland immer sicher genug

$$M : W = 100 : 99$$

setzen dürfen, welches von Florencourts Verhältnißbestimmung

$$M : W = 100 : 104{,}5$$

sehr abweicht.

§. 67.

Ein vorzüglicher Gebrauch der Mortalitätstafeln zeigt sich weiter unten bei Berechnung der Leibrenten, Wittwenkassen u. dgl. Aber auch andere interessante Fragen lassen sich daraus beantworten, z. B.

1. Ein Staat sey in Kreise getheilt; einer dieser Kreise enthalte 88000 Einwohner; wenn nun von allen männlichen Geschlechts, die nicht unter 18 und nicht über 40 Jahre alt sind, durchaus der 10te Kopf zum Soldat ausgehoben werden soll, wieviele Köpfe wird der gedachte Kreis liefern? Man findet 1540 Mann.

2. Eine Armee von 60000 Mann bestehe aus Männern von 20 bis 50 Jahren; beiläufig in demselben Verhältnisse, wie V. Tafel 3te Kol. Wieviele werden jährlich davon (zur Friedenszeit) sterben? Man findet 968 Mann.

Verlieren in einem Jahre von dieser Armee z. B. 15000 Mann in Schlachten das Leben, so würden hier-

nach $\frac{968}{4} = 242$ Mann doch eines natürlichen Todes gestorben seyn.

3. Wieviele dienstfähige junge Leute werden einem Staate, der jetzt 1000000 Menschen enthält, in einem Zeitraume von 5 Jahren zuwachsen?

Setzt man z. B. das 18te Jahr als das geringste Alter der Dienstfähigkeit fest, so erwachsen einem Staate von 293640 Menschen in 5 Jahren vom 13ten bis 17ten Jahre an 18- bis 22jährigen überhaupt 24860 Menschen.

Hiervon $\frac{100}{99}$ für das männliche Geschlecht gerechnet, giebt 12492; also die gesuchte Zahl =

$$\frac{1000000}{293640} \cdot 12492 = 42540.$$

Einem Staate von 30000000 Menschen wachsen also innerhalb 5 Jahren sicher 1276000 Menschen männlichen Geschlechts zwischen 18 und 23 Jahren zu. Wird von zehen Einer zum Militär genommen, so bilden sie in 5 Jahren eine neue Armee von 127000 Mann.

§. 68.

Es wäre höchst wichtig, zu wissen, welchen Einfluß die Ausrottung der Blattern auf die Bevölkerung haben könne?

Ich finde

$$\text{XLII.}\quad E = \frac{K + G - \Sigma + \frac{B + S - s}{S} \cdot B}{K}$$

Dabei ist

S die Summe aller Kinder von 0 bis zu 6 Jahren, welche zu einer gewissen Zeit vorhanden waren; angenommen, daß über das 6te Jahr hinaus der Verlust wegen der Blattern als unbedeutend bei Seite gesetzt werden könne.

s die Summe aller damals Verstorbenen von 0 — 6 J.

B die Summe aller vormals an den Blattern Verstorbenen von 0 bis 6 J.

Σ die Summe aller vormals jährlich sterbenden Menschen.

G die Summe aller jährlich Gebornen.

K die jetzige gesammte Volksmenge.

E der Vergrößerungs-Exponent bei angenommener Ausrottung der Blattern.

Es fehlt hier noch an hinlänglich genauen Bestimmungsstücken. Aus hin und wieder angegebenen nehme ich folgende:

$$K = 8100000 \qquad B = 19745$$
$$\Sigma = 262800 \qquad s = 125355$$
$$G = 271500 \qquad S = 666460$$

Diese Voraussetzungen geben

$$E = 1{,}001279$$

Vorher, vor Ausrottung der Blattern, war

$$E = 1{,}001074.$$

Für die Verdoppelungszeit giebt

der letzte Werth von E

n = 645 Jahre.

der erste

n = 542 —

Hiernach käme also wegen Ausrottung der Blattern die Volksmenge um $\frac{1}{6}$ der sonst erforderlichen Zeit früher als sonst zur Verdoppelung.

1. Anm. Es bleibt aber hierbei noch ein wichtiger Zweifel übrig. Würden nicht diejenigen, welche den Blattern unterliegen mußten, wenigstens großentheils das Opfer einer andern Kinderkrankheit geworden seyn? Ließen nicht die Kinderblattern, im Ganzen genommen, nur die stärkern Kinder zurück, die dann auch bei andern Kinderkrankheiten der Gefahr des Sterbens weniger unterworfen waren, so daß wir, solange die Blattern allgemein herrschten, den Grad der Tödtlichkeit anderer Kinderkrankheiten weniger kennen lernten.

Jetzt, da auch selbst der schwächere Theil der Kinder dem Angriffe der Blattern entgeht, bleiben auch solche allen übrigen zahllosen Kinderkrankheiten unterworfen, und es muß ein beträchtlicher Theil derselben unterliegen. Ich setze daher noch großen Zweifel in die Richtigkeit der Behauptung, daß durch die Beseitigung der Kinderblattern andere Kinderkrankheiten tödtlicher als vormals geworden seyen. Sie raffen mehr weg, weil sie mehr finden.

Wir sind daher durchaus nicht berechtigt, im obigen Werthe von E die Zahl B ganz beizubehalten. In der Ungewißheit, was für einen aliquoten Theil von B wir beibehalten sollen, will ich αB statt B schreiben. Dieses giebt

$$\text{XLIII.}\quad E = \frac{K + G - \Sigma \frac{\alpha B + S - s}{S} \cdot \alpha B}{K}$$

2. Anm. Wenn man seit der allgemeineren Einführung der Blatter-Einimpfung, insbesondere der Vaccinirung, unsere Städte und Dörfer mehr mit Menschen angefüllt sieht, als vorher, so hüte man sich, hieraus sogleich auf künftiges Wachsthum der Volksvermehrung zu schließen. Der Vergrößerungs-Exponent hängt blos von dem Alter ab, welches in die Zeugungsperiode fällt. Auf dem Lande schreitet man gewöhnlich ziemlich frühe zur Ehe. Im Durchschnitt genommen wird man für die Gebährungsperiode der Frauen kaum 24 Jahre annehmen können. Wenn daher gleich der Zeugungsperiode der Männer eine Dauer von 40 Jahren zugestanden werden könnte, so wird man dennoch, in Rücksicht auf die Gebährungsperiode der Frauen, jene für die Männer etwa nur vom 23sten bis 45sten Jahre rechnen dürfen. Man wird daher noch zu Gunsten der Bevölkerung rechnen, wenn man die Zeugungsperiode vom 20sten bis zum 45sten J. rechnet, ihr also eine Dauer von 26 Jahren einräumt. Hiernach bleiben also alle männl. Geschlechts unter 20 J., so wie die über 45 J., in Bezug auf Bevölkerung, als unnütze Werkzeuge (im Durchschnitt genommen) ausgeschlossen. Wenn daher von dem Einflusse der Blatter-Impfung auf zunehmende Bevölkerung die Rede ist, so kann man nur auf diejenigen Rücksicht nehmen, welche, als von dem Blattern-Tode gerettet, auch wirklich die Zeugungsperiode erreichen. Gesetzt, die von diesem Tode Geretteten würden nach und nach bis zum 22sten Jahre durch andere Krankheiten so weggerafft, daß endlich bis zum 22sten Jahre keine größere Anzahl übrig bliebe, als vorher wegen der Blattern, so würde zwar die Volksmenge mehr 2jährige, 3jährige, 4jährige .... 15jährige, 16jährige .... 21jährige Menschen ent-

halten, als vorher; aber die Volksmenge von Menschen über 22 Jahren würde nicht zunehmen, folglich die Anzahl der jährlich Gebornen nicht steigen können. Die Volksmenge würde immer nur Menschen von gedachten Jahren, und vorzüglich von 1 bis 12 Jahren, künftighin in einer bestimmten größeren Menge enthalten. Der Staat nähme also, bis zu einer bestimmten Gränze, hauptsächlich nur an solchen Menschen zu, welche an der Konsumtion, an den Erziehungsanstalten und allen zur Erziehung erforderlichen Kosten Theil nehmen, ohne selbst dem Staate schon nützen zu können. Eine solche Vergrößerung der Volksmenge wäre also für den Staat im Ganzen eigentlich von keinem Nutzen. Dieses nur zur Erläuterung, keineswegs aber um damit zu behaupten, daß die von dem Blatterntode Geretteten wirklich alle vor der Zeugungsperiode durch andere Krankheiten weggerafft würden.

§. 69.

Unmittelbare Verminderung der zur Zeugungsperiode gehörigen Menschenklasse ist daher das wirksamste unter allen denkbaren Mitteln zur Verminderung der Bevölkerung, folglich zur Schwächung eines Staats, daher schon in dieser einzigen Hinsicht der Krieg, wo er Bedürfniß ist, gewiß das schlimmste unter allen Staatsbedürfnissen. Dieser höchstwichtige Gegenstand verdient hier noch einige Bemerkungen. Wir wollen für die Volksmenge von 293640 Menschen die zeugende Klasse zu 44000 männl. Geschlechts annehmen, und nun die Frage aufwerfen:

Wie wird sich die Volksmenge nach und nach ändern, wenn jetzt von den 44000 plötzlich 2000 weggenommen werden, auch für Wiederholungen dieser Abnahme?

Die mir hier vorgeschriebene Kürze erlaubt mir keine umständliche Beantwortung. Also nur folgendes.

Am Ende des 1ten Jahres nach der Wegnahme ist die ordentliche Zahl der 20jährigen durch die damals 19jährigen wieder ersetzt. Ebenso tritt am Ende des 2ten Jahres der vollständige Ersatz der 21jährigen ein u. s. f. Am Ende des 26sten Jahres ist die Anzahl aller vom 20 — 45sten J. wieder ersetzt, u. s. f.

Am Ende von 78 Jahren, nach Wegnahme jener 2000 Menschen männl. Geschlechts, tritt bei vorausgesetztem vormaligem Beharrungsstande wieder dieselbe Volksmenge ein, wie 78 früher, d. h. wie am Anfang der 78 Jahre.

Rechnet man die thätige Menschenklasse, im Durchschnitt genommen, bis ins Alter von 60 Jahren, so erfordert die vollständige Wiederherstellung derselben, wann in einem Lande von 293640 Menschen plötzlich 2000 Mann von 20 — 45 J. weggenommen werden, 41 Jahre.

Geschieht diese Wegnahme in 78 Jahren q mal, so werden zur vollständigen Wiederherstellung der thätigen Menschenklasse q . 41 Jahre erfordert; es ist dasselbe, wenn auch gleich anfänglich q . 2000 von 20 — 45 J. weggenommen werden. Nur sind die Wegnahmen dem Staate desto schädlicher, je schneller sie nach einander erfolgen, also auch je größer die mit einmal weggenommene Menge q . 2000 ist.

Die Resultate bleiben ohngefähr dieselben, wenn in einem Staate von 30000000 Menschen 200000 statt der 2000 weggenommen werden.

Anm. Die vorstehende Berechnung ist noch zu gelinde. Weggenommene Krieger gehören zum Kern der Nation; Schwächliche, Kränkliche und Krüppel bleiben ausge-

schlossen. Ihre Stellen werden aber von Menschen aller Art wieder ausgefüllt, unter welchen sich Kränkliche, Krüppel u. dgl. mit befinden; es ersetzen also 2000 neu einrückende keineswegs weggenommene 2000 Mann, die zum Soldatenstande treten. Man wird in dieser Hinsicht ohne Uebertreibung 2000 weggenommene so in Rechnung bringen dürfen, als wären 2200, in Bezug auf Bevölkerung, weggenommen worden, und hätte daher wenigstens 1,1 q statt q zu schreiben.

Aus obigem erhellet auch, daß am Ende des 26sten Jahres, nach der Wegnahme der 2000 Mann, der Vergrößerungs-Exponent für die Bevölkerung wieder eintritt, wie er zur Zeit der Wegnahme war. Doch ist die thätige Menschenklasse alsdann noch nicht ersetzt.

Der Vergrößerungs-Exponent wird durch die Wegnahme der 2000 Mann nothwendig vermindert. Wurden vorher jährlich 12000 geboren, so ist am Ende des 1ten Jahres nach der Wegnahme die Zahl der Gebornen um etwa 545 geringer, am Ende des 2ten ist dieses Deficit etwas kleiner und so am Ende des 26sten = 0, so daß man im Ganzen während den 26 Jahren den Verlust an weniger Gebornen zu etwa 13.545 oder gegen 7100 rechnen kann.

Für ein Land von 30000000 beträgt bei einer Wegnahme von 200000 Mann jener Verlust an weniger Gebornen bis zur Wiederherstellung des Vergrößerungs-Exponenten etwa 100 mal soviel oder 710000. Bei einer Wegnahme von etwas über 400000 Mann würde, die glückliche Rückkehr des Ueberrestes bei Seite gesetzt, der erlittene Abgang an weniger Gebornen gegen anderthalb Millionen betragen.

§. 70.

Die Mittel zur Befriedigung aller der Bedürfnisse*), deren der gesittete Mensch fähig ist, wachsen in ungleich stärkerem Verhältnisse, als in dem der Volksmenge, weil sie nicht von der Anzahl der Individuen, sondern von den mannichfaltigen Kombinationen derselben abhängen, deren Zahl in ungleich größerem Verhältnisse wächst. Daher die Wichtigkeit der Erhaltung und Vergrößerung der thätigen Menschenklassen.

§. 71.

Das Maaß der Sterblichkeit ist begreiflich nicht für alle Länder dasselbe. Ich habe aus diesem Grunde Tafeln für verschiedene Länder beigefügt. Auch für die beiderlei Geschlechter ist es verschieden, daher man auch in Bezug auf das Geschlecht verschiedene Tafeln angehängt findet. Man kann hier noch folgende beiläufige Verhältnißzahlen merken.

Anzahl der Ehen, welche jährlich geschlossen werden zur Summe aller in demselben Lande lebenden Menschen	in d. holländ. Dörfern wie	1 : 64
	in Berlin —	1 : 110
	in ganz England —	1 : 134
	in Paris —	1 : 137
	in d. kurmärk. Dörfern	1 : 109
Anzahl der stehenden Ehen in einem Lande zur Anzahl der jährlich Gebornen	beiläufig wie	9 : 2
Anzahl der stehenden Ehen zur Summe aller Lebenden in einem Lande	wie	1 : 6,5

Die Anzahl der Verheiratheten in einem Lande etwa $\frac{1}{3,22}$ der ganzen Volksmenge.
— —— der Unverheiratheten $\frac{2,22}{3,22}$ der ganzen Volksmenge.

*) Man sieht, daß ich nicht von den Nahrungsmitteln (Viktualien) verstanden seyn will.

Siebentes Kapitel.

Leibrenten-Berechnung.

§. 72.

Man unterscheidet hier Zeitrenten, Renten auf einen Todesfall überhaupt und Leibrenten. Die Person, welche die Rente bezieht, heißt der Renteniren; die, welche die Rente zu entrichten hat, nenne ich hier die Kasse.

§. 73.

Die Hauptfrage für dieses Kapitel ist folgende:

Wenn ich in einem Alter von α Jahren eine lebenslängliche Rente R von der Kasse erkaufen will, wie groß ist das Kapital K, das ich jetzt dafür zu zahlen habe?

Die nächste Frage ist daher:

Soll bei dieser Berechnung für die mir noch übrige Lebensjahre die mittlere oder die wahrscheinliche Lebensdauer zum Grunde gelegt werden?

Bis gegen das 33ste Jahr hin ist die wahrscheinliche Lebensdauer immer etwas weniges größer als die mittlere; weiterhin bis zum höchsten Alter ist es umgekehrt. Weil die Kasse das

ganze Kapital sich mit Zinsen von Zinsen anrechnen läßt, so wird darin durchaus keine Unbilligkeit liegen, daß die Kasse in allen Fällen diejenige Lebensdauer zum Grunde legt, welche die größere ist, sey es nun die mittlere oder die wahrscheinliche. Auf dem sichern Bestand der Kasse beruht zugleich die größere Sicherheit der Rentenirer; es wird also hiermit zugleich für die Rentenirer gesorgt. Uebrigens kann hierbei nicht auf die Lebensdauer der Menschen überhaupt gesehen werden, weil kränkliche Personen sich nicht leicht in einen solchen Vertrag einlassen werden. Es muß daher die Kasse bei Berechnung der Leibrenten die XII. Tafel zum Grunde legen. Bezeichnet nun λ die gedachte Lebensdauer eines α jährigen, welcher gegen ein Kapital K eine Leibrente R erkaufen will, die gleich 1 Jahr nach der Einlage zum 1ten mal bezahlt werden soll, so hat man

$$\text{XLIV.}\quad K = \frac{(e^{\lambda} - 1) \cdot R}{(e - 1) \cdot e^{\lambda}}$$

$$\text{XLV.}\quad R = \frac{(e - 1) \cdot e^{\lambda} \cdot K}{e^{\lambda} - 1}$$

Die Berechnung nach diesen Formeln ist höchst sichernd für die Kasse, weil sie hiernach so geführt wird, als lebten alle zugleich eintretende Rentenirer gleichen Alters noch λ Jahre (nämlich Jeder von ihnen) und stürben dann am Ende des λten Jahres alle auf einmal. Dieses wäre gerade der unglücklichste Fall für die Kasse, der nie eintreten kann. Die Kasse wird also hiernach auf ein höchst sicheres Fundament gebaut, und die Rentenirer können ebendarum mit den so berechneten Renten sehr zufrieden seyn.

§. 74.

Soll die Rente R nach n Jahren, von Bezahlung des Kapitals K an gerechnet, zum 1ten mal ausbezahlt werden,

so dient die Formel XXXVIII. zur Ableitung der hierhin gehörigen Berechnung. Soll nämlich nach n Jahren die R zum 1ten mal und überhaupt λ mal ausbezahlt werden, so wäre, wofern während den n Jahren keiner verstürbe,

$$K' = \frac{(e^{\lambda} - 1) \,.\, R}{(e - 1) \,.\, e^{n + \lambda - 1}} \,.\, A$$

wo K′ die Summe ist, welche A α jährige für jedem zufallende Rente R zu zahlen hätten. Aber von den A α jährigen geht in den n Jahren eine gewisse Anzahl M ab, welche die Tafel XII. angiebt. Es bleibt daher nur noch

$$K' = \frac{(e^{\lambda} - 1) \,.\, R}{(e - 1) \,.\, e^{n + \lambda - 1}} \,.\, (A - M)$$

und daher für jeden einzelnen Rentenirer

$$\text{XLVI.} \quad K = \frac{(e^{\lambda} - 1) \,.\, R}{(e - 1) \,.\, e^{n + \lambda - 1}} \,.\, \frac{A - M}{A}$$

Die Zahlen A und M nimmt man aus der XII. Tafel.

Anm. Die von Lehrern und Praktikern in der politischen Arithmetik bisher allgemein angenommene Rechnungsweise zur Bestimmung der Leibrenten weicht von der hier angegebenen sehr ab. Sie nehmen nämlich aus den Mortalitätstafeln die von Jahr zu Jahr noch überbleibenden Rentenirer, bestimmen hiernach die von Jahr zu Jahr auszuzahlende Summe, z. B. bis zum 96sten Jahre, welches man hierbei als das letzte ansehen kann, und suchen nun den gegenwärtigen Werth jeder solchen einzelnen Summe. Alle diese einzelnen reducirten Werthe zusammenaddirt, geben dann den Werth von K.

Um diese äußerst mühsame Rechnungsweise zu erleichtern, habe ich die XIII. Tafel beigefügt. Hiernach hat man nun

$$\text{XLVII.} \quad K = \frac{W}{N \cdot c^{96-m}} \cdot R$$

zur Bestimmung des Kapitals K, welches ein m jähriger für eine verlangte Leibrente R zu zahlen hat, die er n Jahre nach der Einlage K zum erstenmal beziehen will.

Wären unsere Mortalitätstafeln wirklich so genau bestimmend, als z. B. die trigonometrischen oder die logarithmischen, so würde diese Formel XLVII. allerdings hier als die einzig richtige anzusehen seyn. Da sie aber durchaus keine scharfe Bestimmungen zulassen, so wäre es eine vergebliche Bemühung, auf einem so weitläuftigen Wege zu einem genauen Resultate gelangen zu wollen; man gelangt aber dadurch auch nicht einmal zu einem sicheren Resultate. Die Rentenirer werden sich sehr gerne die möglichste Sicherheit durch die Einstimmung in jene Voraussetzung erkaufen, auf welche die Gleichung XLVI. gebaut ist, zumal da sich die Kasse auch die Zinsen von Zinsen zur Last rechnen läßt.

§. 75.

Man kann auch inverse Leibrentenkassen einrichten, z. B. Studien- oder Aussteurungskassen. Die Kasse übernimmt z. B. einem Sohne (oder einer Tochter) für das 18te, 19te und 20ste Jahr jedesmal R Reichsthaler zu zahlen; dagegen soll der Vater (oder auch die Mutter) lebenslang einen bestimmten Beitrag an die Kasse zahlen. Hier ist die Kasse der Leibrentenkäufer.

Der gegenwärtige Werth der 3jährigen Rente ist für 18jährige Kinder $= \frac{N}{M} . 5655 . 1,7553 . R'$, wo N die Anzahl der vom Alter der Väter, und M die vom Alter der Söhne ist, wie sie die XII. Tafel angiebt. Setzt man diesen Werth statt K in XLVI., so giebt sich daraus R, nämlich

$$R = \frac{(e - 1) . e^{\lambda'} . K}{e^{\lambda} - 1}$$

oder

$$\text{XLVIII.} \quad R = \frac{(e - 1) . e^{\lambda'} . 9926 . N . R'}{(e^{\lambda'} - 1) . M}$$

wo man zur Sicherheit der Kasse, wegen der inversen Einrichtung, für λ' jedesmal diejenige Lebensdauer nimmt, welche die kleinere ist, sey es nun die mittlere oder die wahrscheinliche.

Achtes Kapitel.

Das Legatum annuum und die Quarta Falcidia.

---

§. 76.

Bei Testamenten tritt zuweilen der Fall ein, daß der Testator seinen Erbe mit der Auflage beschwert, eine jährliche Rente entweder für eine bestimmte Anzahl von Jahren oder auch lebenslang an einen Dritten auszuzahlen. Diese jährliche Rente heißt dann ein Legatum annuum, und der Empfänger der Legatarius. Der Zusatz lebenslang bezieht sich gewöhnlich auf die Lebensdauer des Legatarius; er kann sich aber auch auf die Lebensdauer des Erben und selbst auf die eines Vierten beziehen. Für die Berechnung bleibt der Fall immer derselbe, indem man dabei allemal den, auf dessen Lebenszeit die Rente beschränkt ist, als den Legatarius betrachtet.

§. 77.

Aufg. Ein Testator A setzt den B zum Erbe ein, mit der Auflage, daß B an den C am Ende des nten Jahres nach angetretener Erbschaft ein Legat L zum 1ten mal, dann aber am Ende eines jeden folgenden Jahres dasselbe Legat L an denselben so lange auszubezahlen solle, als ein benannter D am Leben lebt (es mag D der A selbst oder der C oder ein Vierter seyn); man

soll bestimmen, wie hoch der Werth des Leg. ann. zur Zeit der angetretenen Erbschaft zu rechnen sey?

Aufl. Hier dient §. 62. Es ist nämlich dort R hier L, dort n' hier 1, dort m hier $\lambda + 1 - n$, wo λ die Bedeutung wie §. 73. hat. Daher

$$\text{XLIX.}\quad K = \frac{(e^{\lambda + 1 - n} - 1) \, . \, L}{e^{\lambda} \, . \, (e - 1)}$$

Wäre der, auf dessen Todesfall die Rente beschränkt ist, ein gesunder Mensch, so wäre λ aus der XII. Tafel zu nehmen.

§. 78.

Wegen der Präliminarfrage, die in streitigen Fällen vorkommen könnte, ob der, auf dessen Tod die jährliche Auszahlung des Legats beschränkt ist, ein völlig gesunder Mensch zu nennen sey; und bei der Möglichkeit, daß sich selbst während dem Streit über diese Frage die Gesundheitsumstände desselben ändern können, scheint die Nothwendigkeit einer gesetzlichen Bestimmung anerkannt werden zu müssen. Und da wir eine solche in l. 68 ff. ad l. Falc. haben, so ist wohl kein Zweifel, daß wir solche bei gerichtlichen Entscheidungen so lange beibehalten müssen, bis sie durch ein neues Gesetz verdrängt wird. Nach angeführtem Gesetz nimmt Ulpian an, ein Mensch von

0 — 20	Jahren	lebe noch	30 Jahre
21 — 25	——	— —	28 ——
26 — 30	——	— —	25 ——
31 — 35	——	— —	22 ——
36 — 40	——	— —	20 ——
41 — 50	——	— —	Ergänzung zu 60
51 — 55	——	— —	9 ——
55 — 60	——	— —	7 ——
61 und drüber		— —	5 ——

§. 79.

Eine hierher gehörige wichtige Berechnung ist die der Quarta Falcidia. Es ist nämlich durch die Lex Falc. verordnet: 1) daß ein Testator nur den einem Erbe zufallenden Theil seines Vermögens mit Legaten beschweren darf, welcher nicht zum Pflichttheil gehört; 2) daß der Kapitalwerth des Legats höchstens ¾ von dem über den Pflichttheil hinaus gehenden Theil der Erbschaft betragen darf.

Der Pflichttheil (die Legitima) ist für Kinder des Testators so bestimmt:

> Wenn 4 oder weniger Kinder vorhanden sind, so soll er ein Drittheil, und, wenn 5 oder mehr Kinder vorhanden sind, die Hälfte von dem betragen, was jedes Kind erhalten hätte, wenn der Testator ohne Testament gestorben wäre.

§. 80.

Wir wollen den nach Abzug des Pflichttheils übrig bleibenden Theil des Erbtheils = h setzen; wird nun der Erbtheil mit einem Legatum annuum L beschwert, dessen gegenwärtiger Kapitalwerth = K ist, so darf K höchstens = ¾ h seyn; daher

$$\text{XLIX.} \quad \frac{(e^{\lambda+1-n} - 1) \,.\, L}{e^{\lambda} \,.\, (e - 1)} \text{ höchstens } = \tfrac{3}{4} h$$

Dabei ist λ die gesetzlich bestimmte Lebensdauer und n die Anzahl von Jahren, nach deren Verfluß das Legat zum 1ten mal bezahlt werden soll.

§. 81.

Nach dem Preußischen Gesetzbuch (Allgem. Landrecht 2. Th. 2. Tit. §. 392) beträgt der Pflichttheil

für 1 oder 2 Kinder	1/3	der Intestat-Erbportion.
— 3 — 4 —	1/2	
— 5 und mehrere	2/3	

Die neuesten französischen Gesetze Cod. Civil Lib. 3. Chap. 3 Art. 913.) überlassen dem Vater

1/2 der Intestat-Erbportion,	wenn 1 Kind da ist	
1/3 — — —	— 2 Kinder da sind,	
1/4 — — —	— 3 oder mehr —	

Schrader (Abhandlungen aus dem Civilrechte I. Bdch. Hannover 1808.) schlägt (S. 180) vor, den Pflichttheil allgemein $= \frac{n}{n+3}$. E zu setzen, wenn n die Anzahl der Kinder und E die Intestat-Erbportion bezeichnet.

Neuntes Kapitel.

Von Tontinen.

§. 82.

Eine einfache Tontinengesellschaft ist eine aus Personen gleichen Alters bestehende Gesellschaft, welche von einer Kasse eine Leibrente kauft, die unter die am Ende eines jeden Jahres noch lebenden Glieder zu gleichen Theilen vertheilt wird, bis das letzte Glied der Gesellschaft gestorben ist.

Treten mehrere dergleichen einfache Tontinengesellschaften von verschiedenen Altern zusammen, so entsteht eine zusammengesetzte. Wenn von einer Tontinengesellschaft schlechthin die Rede ist, so wird darunter allemal eine zusammengesetzte verstanden. Jede einfache, soviel ihrer in der zusammengesetzten vorkommen, erhält die ihrem Alter und der Anzahl der anfänglichen Mitglieder angemessene Rente.

§. 83.

Es kommt hierbei eigentlich nur auf die Berechnung einer Zeitrente an, deren Bestimmung vom angenommenen höchsten Lebensziele abhängt. Dieses muß hier zum voraus als bestimmt angenommen und der Gesellschaft bekannt gemacht werden, z. B. das 96ste Lebensjahr, über welches hinaus Glieder,

die noch länger leben, keinen weitern Anspruch auf fernere Auszahlung der Rente zu machen haben.

Anm. Die Dauer einer einfachen Gesellschaft bis zum Tode des letzten Mitglieds derselben könnte, wie vorhin angegeben worden, zu 96 Jahren angenommen werden. Hier muß ich aber noch eine Bemerkung, in Bezug auf diese Bestimmung des höchsten Lebensziels, beifügen. Dieses hängt nämlich eigentlich von der Anzahl von Mitgliedern ab, welche zusammentreten. So enthält z. B. die XII. Tafel 3964 50jährige, und der Anhang zur XII. Taf. zeigt, daß von diesen 3964 50jährigen nur 261 das 86ste Jahr erreichen, also nur $\frac{1}{15}$ aller 50jährigen erreicht das 86ste Jahr. Treten also z. B. nur 15 50jährige zusammen, so kann nur Einer davon das 86ste J. erreichen, und der Regel nach bleibt dann Keiner für das 87ste übrig. Wenn daher die Rechnung dennoch, wie die Gesellschaft gerne einwilligen wird, bis zu 96 Jahren geführt wird, so erhellet hieraus, daß der wahrscheinliche Vortheil auf die Seite der Kasse tritt.

Zehntes Kapitel.

Von den Wittwenkassen.

§. 84.

Eine Wittwenverpflegungsgesellschaft, Wittwenkassegesellschaft, ist eine Gesellschaft verheiratheter (zuweilen auch zum Theil unverheiratheter) Mannspersonen, welche einen gewissen Fond theils gleich anfänglich zusammenschießen, theils jährliche Beiträge liefern, um dadurch ein Kapital zur Kasse zu bringen, welches zur Unterstützung der aus dieser Gesellschaft nach und nach entstehenden Wittwen benutzt werden soll, so daß die sterbenden Männer auf diese Unterstützung zuverlässige Rechnung machen können. Es giebt hier mancherlei Eintheilungen, z. B. in aussterbende und perennirende Gesellschaften, in geschlossene rekrutirende und ungeschlossene rekrutirende u. s. w. Wir haben es hier mit ungeschlossenen perennirenden zu thun, weil diese höchstwichtiges Bedürfniß für jeden Staat sind.

§. 85.

Die Errichtung eines Fonds könnte auf eine dreifache Weise geschehen:

I. Durch eine von jedem Mitgliede beim Eintritt in die Gesellschaft ein für allemal zu bezahlende Einlage, ohne nachfolgende Beiträge.

II. Durch blose jährliche Beiträge, ohne anfängliche Einlage.

III. Durch eine anfängliche Einlage beim Eintritt und nachfolgende Beiträge bis zum Tode des Mannes.

Wir werden die allgemeinen Ausdrücke für No. III. suchen, weil solche die für N. I. und II. zugleich mit enthalten, indem man nur den Werth des jährlichen Beitrags oder den der anfänglichen Einlage in dem allgemeinen Ausdruck = 0 setzen darf. Auch ist diese Einrichtung N. III. in vereinter Hinsicht auf Kasse und Mitglieder die vorzüglichste.

§. 86.

In Rücksicht auf die Bestimmung der Wittwenrenten finden gleichfalls verschiedene Voraussetzungen statt, nachdem nämlich die Wittwenrenten ständig oder unständig seyn sollen. Eine vollkommnere Einrichtung der Wittwenkassen fordert ständige Wittwenrenten, die wir daher auch hier voraussetzen.

§. 87.

Weil die gesammte Einnahme der Kasse durch die Auszahlungen an die Wittwen wieder absorbirt werden soll, so liegt es schon in der Natur der Sache, hier gegenseitige Zinsen von Zinsen in Rechnung zu bringen, so daß gegenseitige Zahlungen mit Rücksicht auf Zinsen von Zinsen einander aufheben müssen. Hierauf beruht die Festsetzung hierher gehöriger Gleichungen. Die ordentliche Voraussetzung ist dabei die, daß 1 Jahr nach des Mannes Tode und so fort in jedem folgenden Jahre die Kasse die einmal festgesetzte Rente jeder Wittwe bis in ihren Tod bezahlt.

Anm. Auf die beim Tode einer Wittwe etwa noch vorhandenen Waisen nehmen wir hier durchaus keine

Rücksicht, weil dadurch das ganze Gebäude an Festigkeit verliert. Für die Waisen muß wieder besonders gesorgt werden. S. das folg. Kap.

§. 88.

Bei hierher gehörigen Berechnungen dient die XI. Tafel. Sie werden aber etwas verwickelter als bei den Leibrenten, weil jetzt bei Bestimmung einer Rente auf zwei Todesfälle, den des Mannes und den der Frau, zugleich Rücksicht genommen werden muß. Es geht dabei nicht an, etwa nach den Jahren, um welche die mittlere Lebensdauer der Frau die des Mannes übertrifft, den Werth der Rente bestimmen zu wollen, weil Menschen von jedem höheren Alter vor Menschen von jedem niedrigeren sterben, und ebendarum auch aus einer Gesellschaft von Ehepaaren, wo die Frauen alle beträchtlich älter als die Männer wären, Wittwen entstehen können, für die eine Wittwenkasse denkbar bleibt.

§. 89.

Aufg. Es vereinigen sich jetzt M Ehepaare zu einer Wittwenverpflegungsgesellschaft; die Männer sind μ, die Frauen φ Jahre alt; man soll bestimmen:

1) Wieviele Wittwer
2) Wieviele Wittwen
3) Wieviele Ehepaare

am Ende des $n$ten Jahres vorhanden seyn werden.

Aufl. 1. Man suche in der XI. Tafel die Anzahl der Lebenden männlichen Geschlechts, welche zum Alter von μ und von $\mu + n$ Jahren gehören; sie sollen M und M′ seyn; dann auch der Lebenden weiblichen Geschlechts, welche zum

Alter von φ und von $\varphi + n$ Jahren gehören; diese wollen wir mit $\mathfrak{W}$ und mit $\mathfrak{W}'$ bezeichnen.

So ergiebt sich die Anzahl der nach n Jahren

verstorbenen Männer $= \left(1 - \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}\right) . M$

—— —— Frauen $= \left(1 - \frac{\mathfrak{W}'}{\mathfrak{W}}\right) . M$

2. Ein aliquoter Theil, z. B. $\frac{1}{\psi}$ der verstorbenen Frauen gehört zu den Ehepaaren, aus welchen auch Männer gestorben sind; der übrige Theil $1 - \frac{1}{\psi}$ gehört zu den noch lebenden Männern, die jetzt Wittwer geworden sind; also nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{\psi} : \left(1 - \frac{1}{\psi}\right) = \text{Anzahl der verstorbenen Männer} : \text{Anzahl der noch lebenden}$$

$$= \left(1 - \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}\right) : \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}$$

Daher

$$\text{L.} \quad \psi = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'}$$

3. Ein aliquoter Theil, z. B. $\frac{1}{m}$ der verstorbenen Männer gehört zu den Ehepaaren, aus welchen auch Frauen gestorben sind. Dieses giebt wie vorher

$$\text{LI.} \quad m = \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{W} - \mathfrak{W}'}$$

4. Demnach am Ende des nten Jahres

$$\left.\text{Anzahl aller entstandenen Wittwer}\right\} = \left(1 - \frac{1}{\psi}\right) . \left(1 - \frac{\mathfrak{W}'}{\mathfrak{W}}\right) . M$$

oder (aus No. 2.)

LII. $$= \frac{\mathfrak{M}' . (\mathfrak{W} - \mathfrak{W}')}{\mathfrak{M} . \mathfrak{W}} . M$$

und so

LIII. Die Anzahl aller am Ende des nten J. entstandenen Wittfrauen $$= \frac{\mathfrak{W}' . (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}')}{\mathfrak{W} . \mathfrak{M}} . M$$

Auch

LIV. Anzahl aller Ehen, aus welcher die Männer samt ihren Frauen gestorben sind $$= \frac{1}{\psi} . \left(1 - \frac{\mathfrak{W}'}{\mathfrak{W}}\right) . M = \frac{(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}') . (\mathfrak{W} - \mathfrak{W}')}{\mathfrak{M} . \mathfrak{W}} . M$$

Demnach

LV. Anzahl der am Ende des nten Jahres noch bestehenden Ehen $$= M - \left(\frac{\mathfrak{M}' . (\mathfrak{W} - \mathfrak{W}') . M}{\mathfrak{M} . \mathfrak{W}} + \frac{\mathfrak{W}' (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}') . M}{\mathfrak{M} . \mathfrak{W}} + \frac{(\mathfrak{W} - \mathfrak{W}') . (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}') . M}{\mathfrak{M} . \mathfrak{W}}\right)$$

$$= \frac{\mathfrak{M}' \mathfrak{W}'}{\mathfrak{M} . \mathfrak{W}} . M$$

welches also auch die Anzahl sowohl der noch lebenden Ehemänner als der noch lebenden Ehefrauen ist.

5. Am Ende des nten Jahres leben aber überhaupt noch

$\frac{M}{\mathfrak{M}} . \mathfrak{M}'$ männl. Geschlechts

$\frac{M}{\mathfrak{W}} . \mathfrak{W}'$ weibl. Geschl.

Daraus findet sich wie No. 4.

LVI. Anzahl der nach n Jahren noch lebenden Wittwer $\left.\right\} = \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}} . M - \frac{\mathfrak{M}' . \mathfrak{W}'}{\mathfrak{M} . \mathfrak{W}} . M$

$$= \frac{\mathfrak{M}' . (\mathfrak{W} - \mathfrak{W}')}{\mathfrak{M} . \mathfrak{W}} . M$$

und so auch

LVII. Anzahl der nach n Jahren noch lebenden Wittwen $\left.\right\} = \frac{\mathfrak{W}' . (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}')}{\mathfrak{W} . \mathfrak{M}} . M$

§. 90.

Am Ende eines jeden nten Jahres empfängt also die Kasse, wenn der Beitrag eines einzelnen Ehemanns von bestimmtem Alter, von welchem anfänglich M vorhanden sind, mit S bezeichnet wird, überhaupt (LV.) eine Summe

$$\text{LVIII.} = \frac{\mathfrak{M}' . \mathfrak{W}'}{\mathfrak{M} . \mathfrak{W}} . M . S$$

Dagegen zahlt die Kasse am Ende eines jeden nten J. (nach LVII.) zusammen eine Summe

$$\text{LIX.} = \frac{\mathfrak{W}' . (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}')}{\mathfrak{M} . \mathfrak{W}} . M . Z$$

wenn Z eine einzelne Wittwenrente bezeichnet.

§. 91.

Aufg. **Es treten M Ehepaare von μ jährigen Männern und φ jährigen Frauen zusammen; die Männer kontribuiren, gleich beim Eintritt, ein Jeder die Einlage E, und jährlich Jeder, dessen Frau noch lebt,**

den Beitrag S; dagegen erhält jede Wittwe β Jahre nach des Mannes Tode zum 1ten mal die Rente Z, die sie dann alljährlich bis zu ihrem Tode bezieht; man soll das Verhältniß zwischen M, E, S und Z bestimmen, gegenseitige Zurechnung der Zinsen von Zinsen vorausgesetzt.

Aufl. 1. Man suche (XI. Tafel) die Zahlen auf, welche anzeigen, wieviele von beiden Altern μ und φ leben; jene sey = M, diese = W.

2. Man suche nun in derselben Tafel die verschiedenen Werthe von M' und W', die im vor. §. zu n=1, n=2, n=3 u. s. w. gehören, d. i. die Anzahl von Menschen männlichen und weibl. Geschlechts, welche von M' und W' nach dem 1ten, 2ten, 3ten Jahre u. s. f. noch leben, bis man auf einen Werth kommt, nach welchem entweder kein Ehemann oder keine Ehefrau mehr lebt, wodurch dann der letzte Werth von n bestimmt wird, für welchen die jährlichen Beiträge berechnet werden müssen.

3. Es sey nach derselben Tafel

Nach dem Eintritt in die Gesellschaft am Ende	Anzahl der Lebenden vom männl. Geschlecht	Anzahl der Lebenden vom weibl. Geschlecht
des 1ten J.	A'	B'
— 2ten	A''	B''
— 3ten	A'''	B'''
⋮		
— nten	A^n	B^n

wo also n neben A und B nur eine Anzahl von Strichen bezeichnet, so daß hiernächst entweder beim männlichen oder

beim weiblichen Geschlecht in der Tafel O folgt, so ist der jährliche Beitrag

am Ende des 1ten J. . . . . . $\frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'}{\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{W}}\,.\,M\,.\,S$

— — — 2ten . . . . . . $\frac{\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''}{\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{W}}\,.\,M\,.\,S$

⋮

— — — nten . . . . . . $\frac{\mathfrak{A}^n\mathfrak{B}^n}{\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{W}}\,.\,M\,.\,S$

4. Wenn nun vom Eintritt in die Gesellschaft bis zum Tode der letzten Wittwe ε Jahre verfließen, so ist am Ende des εten J.

der Werth des 1ten Beitrags $= e^{\varepsilon-1}\,.\,\frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'}{\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{W}}\,.\,MS$

— — — 2ten — $= e^{\varepsilon-2}\,.\,\frac{\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''}{\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{W}}\,.\,MS$

⋮

— — — nten — $= e^{\varepsilon-n}\,.\,\frac{\mathfrak{A}^n\mathfrak{B}^n}{\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{W}}\,.\,MS$

Die Summe dieser Werthe läßt sich durch

$$\Sigma\,.\,MS$$

ausdrücken. Hierzu kommt nun noch der reducirte Werth der anfänglichen Einlage E mit den Zinsen von Zinsen; dieser ist am Ende des εten Jahres

$$= e^{\varepsilon}\,.\,EM$$

5. Wird nun die Rente Z nicht gleich im 1ten Jahre nach des Mannes Tode, sondern β Jahre nach dessen Tode zum 1ten mal bezahlt, so lassen sich die Werthe von $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{W}'$ am Ende des βten, $\beta+1$ten, $\beta+2$ten, . . . $\beta+x$ten Jahres durch

$$\mathfrak{A}^{\beta},\ \mathfrak{A}^{\beta+'},\ \mathfrak{A}^{\beta+''}\ \ldots\ldots\ \mathfrak{A}^{\beta+r}$$

$$\mathfrak{B}^{\beta},\ \mathfrak{B}^{\beta+'},\ \mathfrak{B}^{\beta+''}\ \ldots\ldots\ \mathfrak{B}^{\beta+r}$$

ausdrücken, so daß $\beta + r$ wieder nur eine Anzahl von Strichen bedeutet, welche die No. 3. erklärte Bedeutung haben.

6. Hiernach ist nun (§. 90.), für $\beta = 1$, der Betrag der Renten für die einzelnen Jahre

$$\text{am Ende des 1ten J.} = \frac{\mathfrak{B}'.(\mathfrak{M} - \mathfrak{A}')}{\mathfrak{M}.\mathfrak{W}}.MZ$$

$$\text{— — — 2ten} = \frac{\mathfrak{B}''.(\mathfrak{M} - \mathfrak{A}'')}{\mathfrak{M}.\mathfrak{W}}.MZ$$

$$\vdots$$

$$\text{— — — }\varepsilon\text{ten} = \frac{\mathfrak{B}^{r+1}(\mathfrak{M} - \mathfrak{A}^{r+1})}{\mathfrak{M}.\mathfrak{W}}$$

7. Am Ende des εten Jahres sind die reducirten Werthe dieser Rentenzahlungen wegen der Zinsen von Zinsen folgende:

$$\text{Von der 1ten} = e^{\varepsilon-1}.\frac{\mathfrak{B}'.(\mathfrak{M} - \mathfrak{A}')}{\mathfrak{M}.\mathfrak{W}}.MZ$$

$$\text{2ten} = e^{\varepsilon-2}.\frac{\mathfrak{B}''.(\mathfrak{M} - \mathfrak{A}'')}{\mathfrak{M}.\mathfrak{W}}.MZ$$

$$\text{3ten} = e^{\varepsilon-3}.\frac{\mathfrak{B}'''.(\mathfrak{M} - \mathfrak{A}''')}{\mathfrak{M}.\mathfrak{W}}.MZ$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon\text{ten} = e^{0}.\frac{\mathfrak{B}^{\varepsilon}.(\mathfrak{M} - \mathfrak{A}^{\varepsilon})}{\mathfrak{M}.\mathfrak{W}}.MZ$$

Ich drücke die Summe dieser Werthe durch

$$\Pi.MZ$$

aus.

8. Wegen der Bedingung der Gleichheit, welche zwischen der Summe der reducirten Werthe aller Einnahmen, die der Kasse zufallen, und der Summe der reducirten Werthe aller Ausgaben, welche die Kasse zu bestreiten hat, statt finden muß, hat man nun (No 4. und 7.) die Grundformel

$$e^{\varepsilon} . ME + \Sigma . MS = \Pi . MZ$$

oder

$$\text{LX.} \quad e^{\varepsilon} . E + \Sigma . S = \Pi . Z$$

Sie giebt

$$\text{LXI.} \quad S = \frac{\Pi Z - e^{\varepsilon} . E}{\Sigma}$$

$$\text{LXII.} \quad Z = \frac{e^{\varepsilon} . E + \Sigma . S}{\Pi}$$

$$\text{LXIII.} \quad E = \frac{\Pi Z - \Sigma . S}{e^{\varepsilon}}$$

9. Verlangt man, daß E z. B. 3, 4, 5, oder allgemein γ mal so groß als S seyn soll, so hat man

$$e^{\varepsilon} . \gamma . S + \Sigma . S = \Pi . Z$$

also

$$\text{LXIV.} \quad S = \frac{\Pi Z}{e^{\varepsilon}\gamma + \Sigma}$$

§. 92.

Sollte beim Tode des Mannes die anfängliche Einlage E wieder zurückbezahlt werden, so dürfte man in LX. nur zuerst E = 0, dann aber in dem so abgeänderten Ausdruck S + (e − 1) . E statt S schreiben, weil alsdann die Kasse

außer dem ordentlichen Beitrage S auch noch die Zinsen von E ebenso oft als den Beitrag S zu beziehen hat. Dann erhält man also statt LX.

$$\text{LXV.}\quad \Sigma\,.\,[S + (e-1)\,.\,E] = \Pi\,.\,Z$$

Daher

$$\text{LXVI.}\quad S = \frac{\Pi Z}{\Sigma} - (e-1)\,.\,E$$

und

$$E = \frac{\frac{\Pi Z}{\Sigma} - S}{e-1}$$

oder

$$\text{LXVII.}\quad E = \frac{\Pi Z - \Sigma S}{(e-1)\,.\,\Sigma}$$

Sollte $E = \gamma\,.\,S$ werden, so wäre aus LXV.

$$\text{LXVIII.}\quad \Sigma\,.\,[1 + (e-1)\,.\,\gamma]\,S = \Pi Z$$

und

$$\text{LXIX.}\quad S = \frac{\Pi Z}{[1 + (e-1)\,.\,\gamma]\,.\,\Sigma}$$

Diese Rückzahlung der ersten Einlage E hat wenigstens das zur Empfehlung, daß auch der Dürftigere dadurch eher Kredit findet, um die Summe E bei Jemanden aufnehmen zu können, indem er bei der Abgabe zur Kasse zugleich die Anzeige zu machen übernimmt, daß die gedachte Einlage an seinen Kreditor unmittelbar zurückbezahlt wird. Auch kann in dieser Hinsicht alsdann γ größer als sonst genommen werden, z. B. $\gamma = 5$ oder $= 6$, wodurch dann der jährliche Beitrag verringert und die Kasse, also auch die Gesellschaft, mehr gesichert wird.

§. 93.

Es läßt sich schon aus der Natur der Sache begreifen, daß die auf Zinsen von Zinsen begründete Berechnung die jährlichen Beiträge höher geben muß, als die einfache Zinsenrechnung. Inzwischen theile ich zur Vergleichung der Resultate, welche diese verschiedenen Voraussetzungen geben, noch folgendes mit.

Aufg. A zahlt an B jetzt gleich das Kapital E und dann am Ende eines jeden Jahres die Summe S, n Jahre lang nach einander; dagegen soll B an den A am Ende des n + 1ten Jahres und so am Ende eines jeden folgenden Jahres m Jahre lang die Rente R zahlen; man soll das Verhalten der Größen E, S und R gegen einander angeben.

I. Für Zinsen von Zinsen.

1. Nach bisherigen Lehren wird aus E am Ende des n + mten Jahres ein Kapital

$$= e^{m+n} \cdot E$$

2. Aus sämtlichen Beiträgen wird bis ebendahin ein Kapital

$$\text{LXX.} = \frac{e^m \cdot (e^n - 1)}{e - 1} \cdot S$$

3. Die jährliche Rente R ist bis ebendahin mit einem Kapital äquivalent, welches

$$\text{LXXI.} = \frac{e^m - 1}{e - 1} \cdot R$$

4. Daher

$$\text{LXXII.}\ (e-1).e^{m+n}.E+e^{m}.(e^{n}-1).S=(e^{m}-1).R$$

und

$$\text{LXXIII.}\ S=\frac{(e^{m}-1).R-(e-1).e^{m+n}.E}{e^{m}.(e^{n}-1)}$$

II. Für einfache Zinsen findet man nach demselben Gange

LXXIV.

$$S=\frac{\left(1+\frac{(e-1).(m-1)}{2}\right).mR-[1+(m+n).(e-1)]E}{[1+m.(e-1)].\left(1+\frac{(e-1).(n-1)}{2}\right).n}$$

§. 94.

Man könnte auch noch einen dritten Fall annehmen. Es könnte in der vorigen Aufgabe das von A bezahlte Geld (E nebst S) nach einfacher Zinsenrechnung in Anschlag kommen, die Rente R aber, welche nachher A von B bezieht, mit Rücksicht auf Zinsen von Zinsen berechnet werden. Für diese Voraussetzung fände man

$$\text{LXXV.}\ S=\frac{\frac{(e^{m}-1).R}{e-1}-[1+(m+n).(e-1)].E}{[1+m.(e-1)].\left(1+\frac{(n-1).(e-1)}{2}\right).n}$$

Diese Bestimmungsweise wäre freilich für die Kasse die vortheilhafteste, folglich auch für die Rentegesellschaft die sicherste. Aber es wäre unbillig, solche Mittel zur Sicherstellung der Kasse und der Gesellschaft zu wählen, wobei letztere beträchtlich verkürzt und aus einem wohlthätigen Institut eine Finanzspekulation gemacht würde.

§. 95.

Den letztern Vorwurf kann man besonders dem allgemeinen Wittwenverpflegungs-Institut zu B. machen, welches fordert:

1) Daß der zum Institut tretende Gatte noch 5 Jahre leben muß, wenn seine künftige Wittwe die ganze erkaufte Rente beziehen soll. Stirbt er im ersten Jahre, so erhält die Wittwe nur 1/5; stirbt er im zweiten, so erhält die Wittwe 2/5 u. s. f. *)

2) Daß ein Ehemann, wenn er auch nicht an seinem Heirathstage zur Gesellschaft getreten, also die dabei bedeutende Einlage E an diesem Tage nicht bezahlt hat, bei späterem Eintritte mit Entrichtung der Einlage E auch noch die Zinsen von E, vom Heirathstage angerechnet, nachzahlen muß.

Durch die 1te Forderung wird das Institut des Namens einer Versorgungsanstalt ganz unwürdig. Die 2te stützt sich auf eine offenbare Ungerechtigkeit. Ich will folgenden Fall annehmen:

Es treten in diesem weitläuftigen Staate z. B. 80 Männer von 50 Jahren zum Institute, welche schon seit 20 Jahren verheirathet waren; jeder erlege z. B. 100 Rthlr. beim Eintritt, so muß er, 5 p. C. Zinsen gerechnet, 100 Rthlr., also die 80 Ehemänner zusammengenommen

---

*) Vielleicht gebe ich die Zahlungen an die Wittwen hier noch zu liberal an. Da ich den Plan dieses Instituts nicht mehr zur Hand habe, so bin ich noch ungewiß, ob nicht die Wittwe eines im 1ten Jahre versterbenden gar nichts, dann die Wittwe eines im 2ten J. versterbenden erst 1/5 u. s. f. erhalte.

8000 Rthlr. unter dem Namen der Retardatzinsen nachzahlen. Dieses ist barer unbefugter Gewinn für die Kasse; es sind diese Retardatzinsen willkührliche Strafgelder, die man den später eintretenden Mitgliedern abzwängt, nicht etwa zum Vortheile der Wittwen — denn sie kommen bei Bestimmung des Werths von R gar nicht in Betrachtung — sondern zum Vortheil der Kasse, an welchem die Wittwen durchaus keinen Antheil haben. Diese Männer zahlen jetzt nicht E, wie es den künftigen Renten gemäß ist, sondern 2E, aber die Kasse sieht sie in Bestimmung der Renten so an, als hätten sie nur 1.E bezahlt. Die Renten werden überdas so berechnet, daß dabei auf die beim Tode des Mannes erfolgende Rückzahlung der ersten Einlage schon Rücksicht genommen wird. Die Kasse benutzt von der ersten Einlage E nur die Zinsen, aber von der aus den Retardatzinsen entstehenden Summe, die hier ebenso groß ist als E, benutzt sie nicht nur die ihr durchaus nicht zukommenden Zinsen, sondern behält auch die Summe selbst beim erfolgenden Tode des Mannes zurück. Und mit allem dem unrechtmäßigen Gewinn vereint sie noch den, welcher aus der unbarmherzigen Forderung (No. 1.) hervorgeht.

Mittel dieser Art wurden vom Regenten dieses Staats, dessen edle Gefühle bekannt sind, gewiß nicht zur Sicherung des Instituts verlangt. Liberalität mußte sich bei diesem Institute um so lauter aussprechen, da die Frauen wegen dieser vom Publikum selbst begründeten Kasse bei ihrer Verheirathung in diesem Staate durch einen schriftlichen Revers allen Ansprüchen auf irgend eine andere Pension ausdrücklich entsagen müssen.

Anm. Eine Wittwenkasse wird nichts zu fürchten haben, wenn sie auf die bis an §. 91. mitgetheilten Berech-

nungen gegründet wird, so daß man auf Waisen dabei gar keine Rücksicht nimmt. Nur zur völligen Beruhigung sowohl der Kasse als der Frauen und Wittwen möchte ich rathen, für das Alter eines eintretenden Mannes die nächstfolgende ganze Zahl von Jahren, hingegen für das Alter seiner Gattin die nächstvorhergehende ganze Zahl bei der Bestimmung des Werthes von E oder von S zum Grunde zu legen. Z. B. das Alter eines Mannes von 37 Jahren 7 Mon. nehme man zu 38 Jahren an, hingegen z. B. das Alter einer Frau von 26 Jahren 8 Mon. nur zu 26 Jahren. Dann lasse man, wie gewöhnlich, alle Quartal $\frac{1}{4}$ S zahlen, wodurch der Kasse in den ersten Jahren, wo noch wenige Wittwen vorhanden sind, wieder einiger Vortheil zuwächst, wenn gleich nachher auch jede Wittwe schon $\frac{1}{4}$ J. nach des Mannes Tode $\frac{1}{4}$ R empfängt. In Bestimmung des Quartalbeitrags $\frac{1}{4}$ S ergänze man, wenn $\frac{1}{4}$ S in Gulden ausgedrückt wird, den Bruch allemal zum nächstfolgenden Viertel, wenn er nicht selbst $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ oder $\frac{3}{4}$ ist. Findet man z. B. $\frac{1}{4}$ S $= 4\frac{7}{19}$ fl., so setze man dafür $4\frac{2}{4}$ fl. Fände man $\frac{1}{4}$ S $= 5\frac{6}{7}$ fl., so setze man dafür 6 fl. Dergleichen kleine Zugaben wird Jeder gut und billig finden.

Den Werth einer einfachen Rente kann man ein- für allemal festsetzen, z. B. R $= 50$ fl. und nun den Werth von S für diese einfache Rente aus LXIX. berechnen, so daß man γ auch ein- für allemal festsetzt, z. B. $\gamma = 5$.

Wer 2×50, 3×50, 4×50 fl. u. s. f. verlangt, bezahlt dafür dann auch das dreifache S und das dreifache E. Die Quartale läßt man zur Erleichterung

des Kassirers für alle Mitglieder von einem gemeinschaftlichen Termine anfangen, z. B. vom 1ten Januar, 1ten April, 1ten Juli und 1ten Oktober.

Wer zwischen dem 1ten Januar und 1ten April die Einlage E bezahlt, muß am 1ten April den 1ten Quartalbeitrag zahlen, und sein Alter wird ebenso eingeschrieben, wie es am 1ten Januar in Rechnung gekommen wäre. Ebenso für jedes andere Quartal.

Wer in einem Quartale verstirbt, wird in Bezug auf den Quartalbeitrag so angesehen, als wäre er schon am Anfange desselben verstorben, aber die Wittwe erhält am Ende dieses Quartals nur die Hälfte der sonstigen Quartalrente. Die Einlage E wird erst am Ende dieses Quartals zurückbezahlt. Stirbt die Wittwe, so wird ihren Kindern der noch restirende Wittwengehalt bis zum Sterbetag der Mutter ausbezahlt. Andere Erben haben auf diesen Gehalt keinen Anspruch zu machen, es sey dann, daß sich Wittwen darunter befinden, welche gleichfalls Renten aus dieser Kasse beziehen.

Die Administrationskosten und Guarantie sind das wenigste, was sich bei Errichtung einer Landes-Wittwenkasse vom Landesfürst hoffen läßt. Weiter möchte ich aber auch nichts von ihm für ein solches Institut erbitten, damit er nicht das Werk des Publikums für das Seinige halte und in diesem Wahne sich der Pflichten gegen die Familien der Staatsdiener entlassen fühlen möge. Der Anspruch des Staatsdieners auf besondere Fürsorge des Regenten für seine zurückbleibende Familie bleibt in demselben Maaße gerecht, wie der Regent die Forderung unbillig findet, dem Diener eine Besoldung zu reichen, von deren Ueberschuß die

Familie auch noch nach seinem Tode mit Bequemlichkeit leben könnte. Gewiß wäre diese Forderung übertrieben, und weil auch der gütigste Fürst seine eigenen Wünsche, für zurückbleibende Familien treuer Staatsdiener genügend zu sorgen, unbefriedigt lassen muß, so bleibt es unnachläßliche Pflicht der letztern, durch Vereinigung ihrer eigenen Kräfte zur Errichtung einer Wittwenverpflegungsgesellschaft dem Unvermögen der Staatskassen zu Hülfe zu kommen. Aber nicht blos die Wittwen — auch die Waisen verdienen eine ähnliche Fürsorge.

Eilftes Kapitel.

Von den Waisenkassen.

§. 96.

Die Verpflichtung einer Kasse, die Wittwenrente auch noch nach dem Tode der Wittwe den hinterlassenen Kindern, z. B. bis ins 20ste oder 21ste Jahr des jüngsten Kindes, auszuzahlen, durchwebt die ganze Wittwen- und Waisenverpflegungsanstalt mit Verwickelungen, die sie einer Lotterie ähnlicher machen, als einem auf sicherm Fundamente gebauten Institute. Die Waisen bedürfen einer eigenen Anstalt zu ihrer Versorgung.

§. 97.

Ich unterscheide eigentliche Waisen von Halbwaisen, deren Mutter noch lebt. Eine zweckmäßige Waisenkasseanstalt muß auf beide Rücksicht nehmen.

§. 98.

Aufg. Es sind M Verbindungen μjähriger Väter mit φjährigen Kindern männlichen Geschlechts vorhanden, die ihren Kindern jedem die Rente Z kaufen wollen, welche jedem Kinde gleich 1 Jahr nach des Vaters Tode zum 1ten mal und fernerhin alle Jahre so lange ausbe-

zahlt werden soll, bis die Kinder ein Alter von α Jahren erreicht haben; man soll eine allgemeine Formel zwischen der ersten Einlage, den jährlichen Beiträgen und der Rente finden.

Aufl. 1. Wir rechnen, wie bisher, der Natur der Sache gemäß, mit Zinsen von Zinsen. Es wird übrigens vorausgesetzt, daß jeder der M Väter ein φjähriges Kind habe. Die Rechnung bleibt dann auch noch auf Väter mit Zwillingen anwendbar, wenn man nur jeden solchen Vater für 2 Väter zählt.

2. Man suche in der Vten Tafel die Anzahl der Lebenden, welche zum Alter von μ Jahren gehören, und die Anzahl derer, welche zu $\mu + n$ Jahren gehören; erstere sey $= \mathfrak{M}$, letztere $= \mathfrak{M}'$; dann auch die Anzahl der Lebenden von φ Jahren und derer von α Jahren; jene soll $\mathfrak{W}$, diese $\mathfrak{W}'$ heißen, so ist wie LIII.

LXXVI. $\left.\begin{array}{l}\text{Anzahl aller nach n Jahren}\\ \text{entstandenen Waisen}\end{array}\right\} = \frac{\mathfrak{W}' . (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}')}{\mathfrak{W} . \mathfrak{M}} . M$

wo unter Waisen überhaupt alle vaterlosen Kinder verstanden werden, die Mutter mag noch leben oder nicht.

3. Man setze nun nach und nach $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ u.s.f. bis zu $n = \alpha - \varphi - 1$, und berechne die zu diesen verschiedenen Werthen von n gehörigen Werthe des Ausdrucks LXXVI. Man kann dabei $M = 1$ setzen.

Werden die so gefundenen Werthe durch N', N'', N''' .... ausgedrückt, so ergeben sich die Zahlungen, welche die Kasse für einen Vater zu zahlen hat. Es beträgt nämlich die

gesammte Zahlung mit Zinsen von Zinsen, wenn die zur Rechten von N geschriebenen Buchstaben die Anzahl von Accenten bezeichnen, am Ende des $\alpha-\varphi$ten Jahres nach dem Eintritt

$$\text{LXXVII.}\ \left\{\begin{matrix} N^{\alpha-\varphi} + eN^{\alpha-\varphi-1} + e^2N^{\alpha-\varphi-2} \\ + e^3N^{\alpha-\varphi-3} \ldots + e^{\alpha-\varphi-1} . N' \end{matrix}\right\} . Z$$

Dafür wollen wir zur Abkürzung $\Pi . Z$ schreiben.

4. Dagegen empfängt die Kasse

$$\begin{array}{ll} \text{am Ende des 1ten Jahres} & (1 - N') . S \\ \text{2ten ——} & (1 - N'') . S \\ \text{3ten ——} & (1 - N''') . S \\ \vdots & \\ \alpha-(\varphi+1)\text{ten} & (1 - N^{\alpha-(\varphi+1)}) . S \end{array}$$

wo S den jährlichen Beitrag des Vaters bezeichnet.

Am Ende des $(\alpha-\varphi)$ten Jahres ist der reducirte Werth aller dieser Beiträge

$$\text{LXXVIII.}\ \left.\begin{matrix} e^{\alpha-(\varphi+1)} . (1 - N') . S \\ + e^{\alpha-(\varphi+2)} . (1 - N'') . S \\ + e^{\alpha-(\varphi+3)} . (1 - N''') . S \\ \vdots \\ + \quad e . (1 - N^{\alpha-(\varphi+1)}) . S \end{matrix}\right\} = \Sigma . S$$

Die Einlage E beim Eintritt wird, auf das Ende des $\alpha-\varphi$ten Jahres reducirt, $= e^{\alpha-\varphi} . E.$

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

Und nun hat man

$$\text{LXXIX.}\quad \Pi . Z = \Sigma . S + e^{\alpha - \varphi} . E$$

$$\text{LXXX.}\quad S = \frac{\Pi Z - e^{\alpha - \varphi} . E}{\Sigma}$$

$$\text{LXXXI.}\quad E = \frac{\Pi Z - \Sigma S}{e^{\alpha - \varphi}}$$

Soll $E = \gamma . S$ seyn, so wird aus LXXIX.

$$\text{LXXXII.}\quad \Pi Z = (\Sigma + e^{\alpha - \varphi} . \gamma) . S$$

Daher

$$\text{LXXXIII.}\quad S = \frac{\Pi Z}{\Sigma + e^{\alpha - \varphi} . \gamma}$$

§. 99.

Für Töchter nimmt man φ aus der VI. Tafel.

Auch muß eine Mutter ihre Kinder zur Waisenkasse auf ihren Todesfall einkaufen dürfen — selbst wenn auch ihr Gatte noch am Leben seyn sollte. Dann wird für μ das Alter der Mutter gesetzt, und die zu diesem Werthe von μ gehörigen Werthe von M und M' aus der VI. Tafel genommen.

§. 100.

Aufg. Es sey alles wie §. 98., nur soll die Rentenzahlung erst am Ende des 1ten Jahres, nachdem die φjährigen Kinder eigentliche Waisen geworden sind, zum erstenmal bezahlt werden; man soll eine allgemeine Formel zwischen E, S und Z finden.

Aufl. Das Alter der Frauen sey beim Eintritt zu dieser Waisenverpflegungskasse = v, die Anzahl der lebenden vjährigen Frauen sey nach der XII. Tafel = w, und die der Lebenden von v + n Jahren = w', so ist die Anzahl aller nach n Jahren vorhandenen eigentlichen Waisen mit der alsdann noch vorhandenen Anzahl ausgestorbener Ehen einerlei, also nach LIV.

$$\text{LXXXIV.} = \frac{(M - M') \cdot (w - w')}{M \cdot w} \cdot M$$

Man verfahre nun mit diesem Ausdruck so wie mit LXXVI. §. 98., so bleiben alle dortige Ausdrücke LXXVII. — LXXXIII. auch für den jetzigen Fall richtig, nur daß N', N'', N''' .... hier andere Werthe als dort erhalten.

Zwölftes Kapitel.

Chronologische Bestimmungen.

§. 101.

Die Chronologie lehrt Zeitabmessungen aus den scheinbaren Bewegungen der großen Weltkörper für das bürgerliche Leben mit hinlänglicher Genauigkeit angeben.

§. 102.

Man begnügt sich in der Chronologie nur mit Bestimmungen in ganzen Tagen, nimmt aber auf die genaueren astronomischen Bestimmungen insoweit Rücksicht, daß man Fehler, die durch die Zeitfolge nach und nach zu einem ganzen Tag anwachsen können, summirt und daraus entstehende ganze Tage wieder gehörig in Rechnung bringt, um sich auf solche Weise von den astronomischen Bestimmungen nie um einen ganzen Tag zu entfernen.

§. 103.

Ein Sonnenjahr hat 365 T. 5 St. 48 Min. 48 Sek. also fast 365 ¼ Tage.

Alle Sonnenmonate sind gleich groß = 1/12 Sonnenjahr.

Der synodische Mondenmonat hat 29 T. 12 St. 44 Min. 2,89 Sek.

Das astronomische Mondenjahr hat 12 synod. Mondenmonate, also 354 T. 8 St. 48 Min. 36 Sek.

§. 104.

Das Julianische Jahr nimmt für das Sonnenjahr 365 ¼ Tage an. Daher verordnete Julius Cäsar, daß jedesmal nach 3 Jahren zu 365 Tagen ein Jahr zu 366 Tagen folgen sollte.

Das 1te Jul. Jahr war das J. 709 nach Erbauung der Stadt Rom; es war ein Schaltjahr (366 T.) und fieng mit einem Neumonde an. Der Neumond tritt ein, wann er zugleich mit der Sonne untergeht. Vom Neumond bis Vollmond hat man zunehmend Licht, vom Vollmond bis Neumond abnehmend Licht.

§. 105.

Das Jul. Jahr hat 365 T. 6 St. oder 365 T. 5 St. 59 Min. 60 Sek. Das Sonnenjahr 365 T. 5 St. 48 M. 48 Sek.

Also war das Jul. Jahr um

59 Min. 60 Sek. weniger 48 M. 48 Sek.
oder um 11 Min. 12 Sek.

zu groß angenommen worden.

Es blieb daher das Jul. J. in 400 Jahren schon um $400 \times 11 \frac{1}{5} = 4480$ Min. $= 74 \frac{2}{3}$ St. oder um beinahe 3 Tage und 3 St. zurück.

Dieses betrug bis zum Papst Gregor XIII. schon fast 10 Tage. Dieser verordnete daher, daß im J. 1582 jene 10 Tage weggelassen wurden, und daß fernerhin binnen 400 Jahren allemal 3 Schalttage wegbleiben sollten, nämlich

jedes 100ste Jahr sollte 3mal hinter einander ein gemeines und nur das 4te ein Schaltjahr bleiben.

Hiernach schrieb man am 5. Oktober 1582 (der Jul. Zeitrechnung) den 15. Okt.

Das J. 1600 blieb dann ein Schaltjahr, folglich 1700, 1800 und 1900 gemeine Jahre; dann aber wird das Jahr 2000 wieder ein Schaltjahr u. s. f.

Anm. Mit dem 754 J. nach Erb. R. fängt die christliche Zeitrechnung an.

Es war also das 709te J. nach E. R. oder das 1te Jul. J. (§. 104.) das 754 — 709 oder 45ste J. vor Chr. Geb. Folglich das J. 1582 noch

$$1582 + 45 = 1627 \text{ nach dem 1ten Jul. J.}$$

Demnach war bis 1582 das Jul. J. um 1627 . 11 ⅕ Min. = 18222 Min. zurückgeblieben. Dieses beträgt 303 St. 42 Min.

= 12 T. 15 St. 42 Min.

Weil nun schon zur Zeit der Nicäischen Synode (im J. 365 nach Chr. Geb.) 3 Tage weggelassen worden waren, so hätten im J. 1582 noch 9 Tage 15 St. 42 Min. weggelassen werden müssen, wofür Papst Gregor XIII. 10 Tage nahm.

§. 106.

Das Jul. Jahr hat	365 T.	6 St.	0 Min.	0 Sek.
Das astr. Mondenj.	354 —	8 —	48 —	36 —
Differenz	11 Tage weniger	2 St.	48 M.	36 Sek.

Ein Mondenmonat hat 29 ½ Tage, also tritt nach dem Neumond derselbe am 30sten Tage wieder ein.

Weiß man also für ein Jahr den Tag, an welchem der Neumond eintrat, z. B. am 1ten Jänner, so kommt der 13te Neumond

nicht am 1ten Jänner des 2ten Jahres, sondern 11 Tage früher, welches der 21ste Dec. des 1ten J. wäre. Demnach fällt der 1te Neumond des 2ten Jahres, welcher 29 ½ T. nachher eintritt, auf den 20sten Jänner des 2ten Jahres.

Nach 12 . 29 ½ oder 354 Tagen tritt der 1te Neumond des 3ten J. ein; dieser Tag fällt 11 Tage vor dem 20sten Jänner, also auf den 9ten Jänner. Er fällt also 22 Tage früher als im 1ten Jahre.

Ebenso würde der wieder 1 Jahr nachher eintretende Neumond 3 . 11 oder 33 Tage früher als im 1ten Jahre, oder 33 Tage vor dem 1ten Jänner des 3ten Jahres eintreten; weil aber jedesmal nach 29 ½ Tagen der Neumond wieder eintritt, so folgt, daß auch 3 Tage vor dem 1ten Jänner des 3ten Jahres der Neumond eintreten, oder daß der Neumond mit Anfang des 3ten Jahres schon 3 Tage alt seyn müsse.

§. 107.

Man sieht hieraus, wie sich das jedesmalige Alter des Mondes für den Anfang eines jeden Jahres bestimmen läßt, wenn man dieses Alter jedesmal vom letztvorhergehenden Eintritt des Neumondes anrechnet, sobald man nur für irgend ein Jahr den Tag weiß, an welchem der Neumond zum erstenmal eintrat.

Fängt man nämlich mit dem Jahre an, in welchem der Neumond am 1ten Jänner eintrat, welches das 2te Jahr vor der christlichen Zeitrechnung war, so hatte man

das Alter des Mondes:

	Tage
am Anfang des 1ten J. (also 1 J. vor Chr. Geb.) . .	XI
am Anfang des 2ten J. (also am Anf. uns. Zeitrechn.)	XXII
am Anfang des 3ten J. (des 2ten unserer Zeitrechn.)	III
am Anfang des 4ten J. . .	XIV
—— —— 5ten . .	XXV
—— —— 6ten . . .	VI
—— —— 7ten . .	XVII
—— —— 8ten .	XXVIII
—— —— 9ten . . .	IX
—— —— 10ten . . .	XX
—— —— 11ten . . .	I
—— —— 12ten . . .	XII
—— —— 13ten . .	XXIII
—— —— 14ten . . .	IV
—— —— 15ten . . .	XV
—— —— 16ten . .	XXVI
—— —— 17ten . . .	VII
—— —— 18ten . .	XVIII
—— —— 19ten . .	XXIX oder Null.

Am Anfang des 3ten Jahres steht hier des Mondes Alter III. Da aber 1 Jahr vorher dessen Alter XXII war, so wäre es hiernach am Anfang des 3ten Jahres eigentlich XXII + XI = XXXIII. Aber jedesmal nach 29 ½ Tagen tritt der Neumond wieder ein; folglich ist sein Alter, das nie über 29 ½ T. betragen kann, am Anfang des 3ten J. vom letzten Neumond angerechnet, nur 33 — 29 ½ = III ½ Tage, wofür hier nur III steht. Dasselbe ist der Fall, so oft das Alter über 29 ½ T. beträgt, also in nebenstehender Tafel 7mal, daher für den ganzen Mondzirkel 7 × ½ oder 3 ½ T. zu wenig gerechnet sind.

Am Anfang des 20sten Jahres wäre also das Alter des Mondes XXIX + XI (oder 0 + XI), d. i. wieder XI Tage wie am Anfang, daher vom 20sten bis 38sten J. immer wieder dieselben Zahlen für das Alter des Mondes wie vom 1ten bis zum 19ten incl. nach einander folgen.

§. 108.

Diese in der Kolonne zur Rechten unter einander stehenden Zahlen werden die jährlichen Mondepakten, und die zugehörigen Nummern in der Kolonne zur Linken die güldenen Zahlen genannt; die ganze Reihe von 19 Jahren, nach deren Verlauf immer wieder dieselbe Ordnung eintritt, heißt der Mondzirkel oder Epaktenzirkel. Die vorstehende Reihe ist der Julianische Epaktenzirkel. Man hat dabei für den ganzen Epaktenzirkel 19×2 St. 48 M. 36 Sek. oder 2 T. 5 St. 23 M. 24 Sek. zuviel gerechnet, dagegen aber 7×½ oder 3½ Tage abgezogen, also noch 1 T. 6 St. 36 M. 36 Sek. im Ganzen zuviel in Abzug gebracht. Um nun diese Unrichtigkeit zu verbessern, so oft sie einen ganzen Tag Abweichung giebt, darf man nur erwägen, daß 1 Tag = 1440 Min. ist. Weil nun 1 St. 28 M. 15 Sek. = 88¼ M., so beträgt jene Abweichung $\frac{1440}{88\frac{1}{4}}$, d. i. 16,317 mal genommen, einen Tag. Man muß daher nach Ablauf von 16,317×19, d. i. von 310 Jahren, jede Mondepakte um einen Tag vergrößern.

Hierbei wird Unveränderlichkeit der Jahrhunderte vorausgesetzt.

So oft daher nach §. 105. am Ende eines Jahrhunderts ein Schalttag wegbleibt, so müssen die Epakten wieder um 1 Tag vermindert werden.

§. 109.

Die Abänderung durch Vergrößerung (§. 111.) heißt die Mondgleichung; die Abänderung durch Verminderung aber die Sonnengleichung. Fallen beide zusammen, so heben sie, weil jede 1 Tag beträgt, einander auf, wie im J. 1800.

§. 110.

Aus dem Jul. Epaktenzirkel findet man leicht den Gregorianischen. Dabei hat man nun auf die Anm. zu §. 105. Rücksicht zu nehmen. Es wurden nämlich von 1582 bis an 1700 nach dem Gregor. Kalender 10 Tage aus dem Julianischen weggelassen. Von 1700 bis an 1800 wurden 11 Tage weggestrichen, z. B. statt 3ten März alten Styls 14ten März neuen Styls geschrieben.

Man erhält also von 1700 bis 1800 aus dem Jul. Epaktenzirkel den Gregorianischen, wenn man die Zahlen des ersteren durchaus um 11 verkleinert. Wo man die 11 nicht abziehen kann, darf man nur die Zahlen des Jul. Epaktenzirkels um 30 vergrößern, und dann die 11 abziehen. Auf solche Weise ergiebt sich

Der Gregorianische Epaktenzirkel
1700 — 1800.

1.	0.	8.	XVII.	14.	XXIII.
2.	XI.	9.	XXVIII.	15.	IV.
3.	XXII.	10.	IX.	16.	XV.
4.	III.	11.	XX.	17.	XXVI.
5.	XIV.	12.	I.	18.	VII.
6.	XXV.	13.	XII.	19.	XVIII.
7.	VI.				

§. 111.

Da der Anfang der Jul. Zeitrechnung 45 Jahre vor Chr. Geb. fällt (Anm. §. 105.), und die Mondepakten jedesmal nach 310 Jahren um einen Tag vergrößert werden müssen (§. 109.), so fände auch für das Jahrhundert 1800 — 1900 diese Vergrößerung statt. Aber wegen der Gregor. Verbesserung müssen von 1800 — 1900 12 Tage (statt sonstiger 11) weggelassen werden (weil 1800 nach dem Gregor. Kalender ein gemeines Jahr, hingegen nach dem Julianischen ein Schaltjahr war); jene Vergrößerung und diese Verminderung heben also einander auf, und es bleibt daher

der Gregor. Epaktenzirkel 1800 — 1900

wie für 1700 — 1800.

Hülfsmittel zur Festberechnung.

§. 112.

Zur Festberechnung dienen der Julianische und der Gregor. Sonnenzirkel oder Sonntagsbuchstabenzirkel. Man bezeichnet nämlich die 7 Wochentage mit Buchstaben

A, B, C, D, E, F, G.

so daß der 1te Jänner allemal mit A bezeichnet wird.

Derjenige Buchstabe, welcher hiernach auf den Sonntag fällt, heißt der Sonntagsbuchstabe (Litera dominicalis).

Fällt z. B. der 1te Jänner auf einen Donnerstag, so hat man

Donnerst.	Freit.	Sonnab.	Sonnt.
A	B	C	D

Also ist für ein solches Jahr D der Sonntagsbuchstabe. Im J. 1810 fällt der 1te Jänner auf Montag, also ist der Sonntagsbuchstabe für 1810 der G.

§. 113.

Der Sonntagsbuchstabe ändert sich aber nicht nur von Jahr zu Jahr ab, sondern auch selbst in einem und demselben Jahre, wenn es ein Schaltjahr ist.

Es hat nämlich ein gemeines Jahr, sowohl nach dem Julian. als nach dem Gregor. Kalender, 365 Tage; nun ist $\frac{365}{7} = 52$ Wochen und 1 Tag; folglich fängt jedes nach einem gemeinen folgende Jahr um einen Wochentag später an.

> Z. B. das J. 1807 fieng mit einem Donnerstag an; es mußte daher das J. 1808 mit einem Freitage anfangen. Dieser hatte also den Buchstaben A, folglich war der Sonntagsbuchstabe C.

In einem gemeinen Jahr bleibt nun der Sonntagsbuchstabe das ganze Jahr hindurch unverändert. Aber in einem Schaltjahre ändert er sich ab. Man betrachtet nämlich den 24. Febr. bei diesen Bezeichnungen als den Schalttag und läßt dem 24sten denselben Buchstaben wie dem 23sten.

> Z. B. 1808. ist ein Schaltjahr. Der 23ste Febr. war ein Dienstag, also mit E bezeichnet; ebendiesen Buchstaben läßt man auch dem 24sten oder dem Mittwochen; folglich fiel auf den 1ten Sonntag nach dem Schalttage der Buchstabe B, da er vor dem Schalttage C war. Man gab daher dem Sonntage für das J. 1808 die beiden Buchstaben CB, in der Bedeutung, daß vor dem Schalttage der C und nach demselben der B gilt.

§. 114.

Nach einer jeden Anzahl von Jahren, die sich durch 7 dividiren läßt, z. B. nach 7, 14, 21, 28, 35 .... Jahren würden, wenn keine Schaltjahre dazwischen fielen, die Buchstaben immer wieder dieselben Wochentage bezeichnen, wie 7 Jahre vorher. Aber wegen der Schaltjahre müßten zugleich 7 Schaltjahre verfließen, um auch die durch sie entstandenen Veränderungen wieder aufzuheben.

Beiden Forderungen geschieht in einer Zeit von 28 Jahren Genüge, so daß jedesmal nach 28 Jahren wieder dieselbe Buchstabenreihe, wie in den vorhergehenden 28 Jahren, für die Wochentage, folglich auch für die Sonntage eintritt.

Eine solche Reihe für die Sonntagsbuchstaben auf 28 nach einander folgende Jahre, heißt ein Sonntagsbuchstabenzirkel, oder abgekürzt, ein Sonnenzirkel.

§. 115.

Nach §. 105. Anm. war das 1te Jahr vor Chr. Geb. das 44ste Jul. Zeitrechnung, also das 1te nach einem Schaltjahre, und es fieng mit einem Sonnabende an.

Im J. 532 wurde auf des Abts Dionysius Vorschlag die christliche Zeitrechnung eingeführt, und der Anfang des Sonnenzirkels 9 Jahre vor Chr. Geb. angenommen, also das 1te J. unserer Zeitrechnung als das 10te des Sonnenzirkels festgesetzt. Da nun solches mit einem Sonnabende anfieng, so mußte das folgende 11te Jahr des Sonnenzirkels mit einem Sonntage anfangen.

Also war im 11ten Jahre des 1ten Sonnenzirkels der Sonntagsbuchstabe nothwendig A.

Weil nun in gemeinen Jahren der Sonntagsbuchstabe in jedem folgenden Jahre um einen Tag, und in einem Schaltjahre, welches 2 Jahre vor dem 11ten vorhergieng, um 2 Tage zurücktritt, so war der Sonntagsbuchstabe

für den Jul. Sonnenzirkel

für das	10te Jahr	B,	hingegen	für das	11te	A
— —	9te	— DC	——	— —	12te	G
— —	8te	— E	——	— —	13te	FE
— —	7te	— F	——	— —	14te	D
— —	6te	— G	——	— —	15te	C
— —	5te	— BA	——	— —	16te	B
— —	4te	— C	——	— —	17te	AG
— —	3te	— D	——	— —	18te	F
— —	2te	— E	——	— —	19te	E
— —	1te	— GF	——	— —	20ste	D
					21ste	CB
					22ste	A
					23ste	G
					24ste	F
					25ste	ED
					26ste	C
					27ste	B
					28ste	A

§. 116.

Weil das 1te Jahr der christl. Zeitrechnung schon das 10te im Jul. Sonnenzirkel ist, so darf man nur, um zu finden, das wievielte Jahr im Jul. Sonnenzirkel irgend ein gegebenes Jahr ist, die gegebene Jahreszahl um 9 vergrößern, und dann die Summe mit 28 dividiren. Die Division kann nur

dann gerade aufgehen, wenn das gegebene Jahr gerade das 28ste oder letzte im Zirkel ist. Allemal giebt der Quotient die Anzahl der bis zum gegebenen Jahre verflossenen Julianischen Sonnenzirkel; der Rest aber zeigt, das wievielte Jahr das gegebene in dem noch nicht vollendeten Sonnenzirkel ist.

Z. B. für 1809 ist $1809 + 9 = 1818$, und $\frac{1818}{28} = 64$, und 26 bleiben zum Rest; also ist das J. 1809 das 26ste im 65sten Jul. Sonnenzirkel, und mit dem J. 1811 geht der 65ste Sonnenzirkel zu Ende.

Anm. Weil von Dionysius das 1te Jahr christl. Zeitrechnung als das 2te im Mondzirkel (von 19 Jahren) angenommen worden, so findet man auf ähnliche Weise, das wievielte Jahr ein gegebenes im Mondzirkel ist, oder die güldene Zahl. Man darf nur die um 1 vergrößerte Jahreszahl mit 19 dividiren. Geht die Division auf, so ist das gegebene Jahr gerade das letzte im Jul. Mondzirkel. Sonst zeigt der Rest, das wievielte im Jul. Mondzirkel das gegebene ist.

§. 117.

Um den Gregor. Sonnenzirkel zu bestimmen, müssen wir (nach §. 105.) auf das J. 1582 zurückgehen, wo Papst Gregor die Verbesserung vornahm.

Addiren wir 9 zu 1582, so haben wir 1591 und nun $\frac{1591}{28} = 56$, und es bleibt 23 zum Rest. Also war das J. 1582 das 23ste in dem 57sten Jul. Sonnenzirkel, und hatte nach der Tafel (§. 106.) den Sonntagsbuchstaben G.

Wären nun nach der Gregor. Verbesserung 14 Tage weggefallen, so wäre der Sonntagsbuchstabe G geblieben; da aber von 1582 bis 1700 nur 10 Tage wegfielen, so blieben noch 4 Tage bis zu jenem G des Jul. Kalenders übrig, es war also jetzt C der Sonntagsbuchstabe.

Man erhält daher für 1582—1700 aus dem Jul. Sonnenzirkel den Gregorianischen, wenn man von jedem Julian. Sonntagsbuchstaben 4 Buchstaben rückwärts zählt.

Im J. 1700 wurde im Jul. Kalender ein Wochentag (an welchem der 24ste Februar fiel) als Schalttag nicht mitgezählt; er hatte keinen besondern Buchstaben, sondern behielt den vom 23. Februar. Man kam also durch Weglassung des Schalttags, wobei jeder folgende Tag einen Buchstaben weiter zählte, um einen Buchstaben näher.

Daher darf von 1700—1800 nur um 3 Buchstaben, und so von 1800—1900 nur um 2 Buchstaben rückwärts gezählt werden, um den Gregor. Sonnenzirkel zu erhalten. Auf diese leichte Weise erhält man folgende Tafeln:

I. Gregor. Sonnenzirkel 1582 — 1700.

1.	CB	11.	D	20.	G
2.	A	12.	C	21.	FE
3.	G	13.	BA	22.	D
4.	F	14.	G	23.	C
5.	ED	15.	F	24.	B
6.	C	16.	E	25.	AG
7.	B	17.	DC	26.	F
8.	A	18.	B	27.	E
9.	GF	19.	A	28.	D
10.	E				

II. Gregor. Sonnenzirkel 1700 — 1800.

1.	DC	11.	E	20.	A
2.	B	12.	D	21.	GF
3.	A	13.	CB	22.	E
4.	G	14.	A	23.	D
5.	FE	15.	G	24.	C
6.	D	16.	F	25.	BA
7.	C	17.	ED	26.	G
8.	B	18.	C	27.	F
9.	AG	19.	A	28.	E
10.	F				

III. Gregor. Sonnenzirkel 1800 — 1900.

1.	ED	11.	F	20.	B
2.	C	12.	E	21.	AG
3.	B	13.	DC	22.	F
4.	A	14.	B	23.	E
5.	GF	15.	A	24.	D
6.	E	16.	G	25.	CB
7.	D	17.	FE	26.	A
8.	C	18.	D	27.	G
9.	BA	19.	C	28.	F
10.	G				

§. 118.

Macht man eine Tafel vom 1ten Jänner für ein ganzes Jahr, so findet man

für den 1sten Jan.	A	für den 1sten Jul.	G
— — 31sten —	C	— — 31sten —	B
— — 1sten Febr.	D	— — 1sten Aug.	C
— — letzten —	C	— — 31sten —	E

Für den 23sten hat man E. Diesen läßt man in einem Schaltjahre auch dem 24sten; also bleibt für den letzten allemal C.

für den 1sten	März	D	für den 1sten	Sept.	F
— — 31sten	—	F	— — 30sten	—	G
— — 1sten	April	G	— — 1sten	Okt.	A
— — 30sten	—	A	— — 31sten	—	C
— — 1sten	Mai	B	— — 1sten	Nov.	D
— — 31sten	—	D	— — 30sten	—	E
— — 1sten	Jun.	E	— — 1sten	Dec.	F
— — 30sten	—	F	— — 31sten	—	A

§. 119.

Aufg. Für jedes Jahr den Wochentag zu finden, auf welchen nach dem Gregor. Kalender ein bestimmter Monatstag fällt.

Aufl. Man suche (wie §. 117. am Anf.) den Sonntagsbuchstaben des Jahres, indem man 9 zur gegebenen Zahl addirt, dann die Summe durch 28 dividirt. Der Rest bei der Division giebt das Jahr des Sonnenzirkels. Dieses Jahr suche man in dem zugehörigen Sonnenzirkel auf, so findet man den Sonntagsbuchstaben. Diesen vergleiche man mit der Tafel §. 118., so findet man den Namen des Wochentags.

Ex. Ich ward am 18. Mai 1757 geboren; was war das für ein Wochentag?

Hier hat man $1757 + 9 = 1766$, und $\frac{1766}{28} = 63$, wo 2 zum Rest bleibt; also war das J. 1757 das 2te Jahr im 64sten Sonnenzirkel. Dieses Jahr hatte (II. Tafel §. 117.) den Sonntagsbuchstaben B. Nun hat nach der Tafel §. 118. der 1ste Mai gleichfalls den Sonntagsbuchstaben B, also war der 1ste Mai 1757 ein Sonntag, folglich auch der 14te ein Sonntag, und der 18te ein Donnerstag.

Osterrechnung.

§. 120.

Es wird als eine Bestimmung der Nicänischen Kirchenversammlung angenommen:

Damit die Ostern nie mit den Juden zugleich gefeiert werden, so sollen die Ostern der Christen jedesmal an demjenigen Sonntage gefeiert werden, der auf den 1sten Vollmond nach der Frühlingsnachtgleiche folgt.

Fällt aber dieser Vollmond auf einen Sonntag, so soll das Osterfest erst am nachfolgenden Sonntage gefeiert werden.

Dieser 1ste Vollmond nach der Frühlingsnachtgleiche heißt der Ostervollmond, und der Tag, an welchem er eintritt, die Ostergränze.

§. 121.

Zu diesen Ostergränzbestimmungen dienen schon berechnete Tafeln:

I. Julianische Ostergränzen.

1.	5. April D	11.	15. April G
2.	25. März G	12.	4. April C
3.	13. April E	13.	24. März F
4.	2. April A	14.	12. April D
5.	22. März D	15.	1. April G
6.	10. April B	16.	21. März C
7.	30. März E	17.	9. April A
8.	18. April C	18.	29. März D
9.	7. April F	19.	17. April B
10.	27. März B		

II. Gregorianische Ostergränzen.

1.	13. April	E		11.	24. März	F
2.	2. April	A		12.	12. April	D
3.	22. März	D		13.	1. April	G
4.	10. April	B		14.	21. März	C
5.	30. März	E		15.	9. April	A
6.	18. April	C		16.	29. März	D
7.	7. April	F		17.	17. April	B
8.	27. März	B		18.	6. April	E
9.	15. April	G		19.	26. März	A
10.	4. April	C				

§. 122.

Aufg. Für jedes Jahr das Osterfest zu bestimmen.

Aufl. Weil in diesen Tafeln neben den Ostergränzen die güldenen Zahlen beigesetzt sind, so darf man nur nach Anm. zu §. 116. die zu dem gegebenen Jahre gehörige güldene Zahl suchen, nebst dem zugehörigen Sonntagsbuchstaben (§. 117. am Anf.). Dann zeigen uns diese Tafeln §. 121. die Ostergränze mit dem zugehörigen Wochentag, und letzterer giebt uns den nächsten Ostersonntag.

1. Ex. Wann mußten im J. 1809 nach dem Gregor. Kalender die Ostern fallen?

Man hat nach Anm. zu §. 116. $1809 + 1 = 1810$, und $\frac{1810}{19} = 95$, wobei 5 zum Rest bleibt.

Also fielen die Ostern 1809 ins 5te Jahr des 96sten Mondzirkels. Hier ist 5 die güldene Zahl.

Man hat ferner (§. 116.) 1809 + 9 = 1818, und $\frac{1818}{28} = 64$; wobei 26 zum Rest bleibt.

Also fielen die Ostern 1809 in das 26ste Jahr des 65sten Sonnenzirkels. Dieses 26ste Jahr hat nach der III. Tafel §. 127. den Sonntagsbuchstaben A.

Nun steht in der II. Tafel (§. 121.) neben der güldenen Zahl 5 der 30. März mit dem Buchstaben E. Da nun der Sonntagsbuchstabe A der 3te Buchstabe nach E ist (nach der Ordnung E, F, G, A), so mußten die Ostern 1809 drei Tage nach dem 30. März, also auf den 2ten April fallen.

Ebenso für das Jahr 1810. Man hat 1810 + 1 = 1811, und $\frac{1811}{19} = 95$, wobei 6 zum Rest bleibt. Es fallen also die Ostern in das 27ste Jahr des 65sten Sonnenzirkels. Dieses 27ste Jahr hat nach der III. Tafel §. 117. den Sonntagsbuchstaben G. Es steht aber die II. Tafel §. 121. neben der güldenen Zahl 6 der 18. April mit dem Buchstaben C. Nun ist (§. 112.) der Sonntagsbuchstabe für das J. 1810 der G, welcher der 4te nach C ist; es fallen also die Ostern 4 Tage nach dem 18. April oder auf den 22sten.

§. 123.

Unbewegliche Feste werden diejenigen genannt, welche alle Jahre auf einen unveränderlichen Monatstag fallen, und zwar im Jul. Kalender auf denselben, d. h. den ebensovielten wie im Gregorianischen; z. B. Petri Stulfeier fällt alle Jahre sowohl im Julianischen als im Gregorianischen Kalender auf den 22. Februar. Dahin gehören nun folgende:

I. Im Jänner.

Den 1. Beschneid. Chr.
— 6. Heil. 3 Könige od. Epiphanias
— 17. Antonius
— 20. Fabian Sebastian
— 25. Pauli Bekehr.

II. Im Februar.

Den 2. Mar. Reinigung
— 6. Dorothea
— 14. Valentin
— 22. Petri Stulfeier
— 24. } Apost. Matthias
— 24. } Im Schaltjahr gilt der 25ste.

III. Im März.

D. 12. Gregorius
— 17. Gertraud
— 19. Joseph
— 25. Mar. Verkünd.

IV. Im April.

Den 4. Ambrosius.
— 23. Georgius
— 25. Evang. Markus

V. Im Mai.

Den 1. Philippi Jakobi
— 3. Kreuz-Erfindung
— 25. Urbanus.

VI. Im Junius.

Den 8. Medardus
— 15. Veit
— 24. Joh. d. Täufer
— 29. Petri u. Pauli

VII. Im Julius.

Den 2. Mar. Heimsuch.
— 13. Margaretha
— 15. Aposteltheilung
— 22. Mar. Magdal.
— 25. Jakobus
— 26. Anna

VIII. Im August.

Den 1. Petri Kettenfeier.
— 10. Laurentius
— 15. Mar. Himmelf.
— 20. Bernhardus
— 24. Bartholomäus
— 29. Joh. Enthauptung

IX. Im September.

Den 1. Aegidius
— 8. Mar. Geb.
— 14. Kreuz-Erhöhung
— 21. Apost. Matthäus
— 29. Michaelis.

X. Im Oktober.

Den 4. Franciscus
— 16. Gallus
— 18. Evang. Lukas
— 21. Ursula
— 28. Simon Judas

XI. Im November.

Den 1. Aller Heiligen
— 2. Aller Seelen
— 11. Martin Bischoff
— 19. Elisabetha
— 21. Mar. Opfer.
— 25. Katharina
— 30. Andreas Apost.

XII. Im December.

Den 4. Barbara
— 6. Nikolaus
— 8. Mar. Empfängniß
— 13. Lucia
— 21. Apost. Thomas
— 25. Weihnachten od. Chr. Geburt
— 26. Stephanus
— 27. Evang. Johannes
— 28. Unschuld. Kinder.

§. 121.

Bewegliche Feste werden diejenigen genannt, welche immer in einer bestimmten Entfernung von Ostern fallen, also wie die Ostern selbst bald früher bald später. Hierhin gehören die folgenden:

I. Von Ostern an rückwärts fallen:

Charfreitag — der Freitag vor Ostern.
Grüner Donnerstag — der Donnerstag vor Ostern.
Palmsonntag — 1ter Sonntag vor Ostern.
Judika — 2ter Sonntag vor Ostern.
Lätare — 3ter Sonntag vor Ostern.
Okuli — 4ter Sonntag vor Ostern.
Reminiscere — 5ter Sonntag vor Ostern.
Invokavit oder Quadragesima — 6ter Sonntag vor Ostern.
Aschermittwoch — der Mittwoch vor Invokavit.
Quinquagesima oder Esto Mihi — 7ter Sonntag v. Ostern.
Sexagesima — 8ter Sonntag vor Ostern.
Septuagesima — 9ter Sonntag vor Ostern.

Weiter rückwärts werden die Sonntage nach Epiphania gezählt. Z. B. im J. 1808 war der 10te Sonnt. vor Ostern der 5te nach Epiphania. Ihre Anzahl hängt vom früheren oder späteren Fallen der Ostern ab.

Die 4 Quatember fallen alle auf Mittwoch:
Das 1te den 1ten Mittwoch nach Invokavit.
Das 2te den 1ten Mittwoch nach Pfingsten.
Das 3te den 1ten Mittwoch nach † Erhöhung.
Das 4te den 1ten Mittw. nach Lucia oder nach d. 13. Dec.

II. Nach Ostern:

Quasimodogeniti — 1ter Sonntag nach Ostern.
Miserikordias — 2ter Sonntag nach Ostern.
Jubilate — 3ter Sonntag nach Ostern.
Kantate — 4ter Sonntag nach Ostern.
Rogate — 5ter Sonntag nach Ostern.
Himmelfahrt Christi — Donnerstag nach Rogate.
Exaudi — 6ter Sonntag nach Ostern.
Pfingsten — 7ter Sonntag nach Ostern.
Trinitatis — 8ter Sonntag nach Ostern.
9ter Sonnt. n. Ostern heißt 1ter Sonntag nach Trinit.

Die folgenden Sonntage bis zum 4ten vor Weihnachten excl. heißen 2ter, 3ter, 4ter .... Sonntag nach Trinit. Die Anzahl dieser Sonntage nach Trinitat. hängt also von dem Fallen der Ostern ab. Z. B. im J. 1808 wurden diese Sonntage bis zum 23sten Sonnt. nach Trinit. fortgezählt.

Der 4te Sonntag vor Weihnachten heißt der 1te Advents-Sonntag, oder schlechthin der 1te Advent. Die 3 folgenden Sonntage heißen der 2te, 3te, 4te Advents-Sonntag.

Angehängte Tafeln.

I. Tafel,

welche die zu den verschiedenen Werthen von n und e gehörigen Werthe von W für K = 1 unmittelbar angiebt.

Werthe von n in Jahren	Für 2 p. C. oder e = 1,02	Für 3 p. C. oder e = 1,03	Für 4 p. C. oder e = 1,04	Für 5 p. C. oder e = 1,05
	Werthe von $W = e^n$	Werthe von $W = e^n$	Werthe von $W = e^n$	Werthe von $W = e^n$
1	1,02000	1,03000000	1,04000000	1,05000000
2	1,04040	1,06090000	1,08160000	1,10250000
3	1,06120	1,09272700	1,12486400	1,15762500
4	1,08243	1,12550881	1,16985856	1,21550625
5	1,10408	1,15927407	1,21665290	1,27628156
6	1,12616	1,19405229	1,26531902	1,34009564
7	1,14868	1,22987386	1,31593178	1,40710042
8	1,17165	1,26677008	1,36856905	1,47745544
9	1,19509	1,30477318	1,42331181	1,55132821
10	1,21899	1,34391638	1,48024428	1,62889462
11	1,24337	1,38423387	1,53945405	1,71033936
12	1,26824	1,42576088	1,60103221	1,79585632
13	1,29360	1,46853371	1,66507350	1,88564914
14	1,31947	1,51258972	1,73167644	1,97993660
15	1,34586	1,55796741	1,80094350	2,07892818
16	1,37278	1,60470644	1,87298124	2,18287459
17	1,40024	1,65284763	1,94790049	2,29201832
18	1,42824	1,70243306	2,02581651	2,40661923
19	1,45681	1,75350605	2,10684917	2,52695019
20	1,48594	1,80611123	2,19112314	2,65329770
21	1,51566	1,86029457	2,27876807	2,78596259
22	1,54597	1,91610341	2,36991879	2,92526072
23	1,57689	1,97358651	2,46471554	3,07152375
24	1,60843	2,03279410	2,56330416	3,22509994
25	1,64060	2,09577792	2,66583633	3,38635494

Fortsetzung der I. Tafel.

Werthe von n in Jahren	Für 2 p. C. oder e = 1,02	Für 3 p. C. oder e = 1,03	Für 4 p. C. oder e = 1,04	Für 5 p. C. oder e = 1,05
	Werthe von $W = e^n$	Werthe von $W = e^n$	Werthe von $W = e^n$	Werthe von $W = e^n$
26	1,67341	2,15659126	2,77246978	3,55567268
27	1,70688	2,22128900	2,88336857	3,73345632
28	1 74102	2,28792767	2,99870332	3.92012914
29	1,77584	2,35656550	3,11865145	4,11613559
30	1.81136	2,42726247	3,23339751	4,32194237
31	1,85758	2,50008034	3,37313341	4,53803949
32	1,88454	2,57508275	3,50805874	4,76494147
33	1,92233	2,65233523	3,64838109	5,00318854
34	1,96067	2,73190529	3,79431634	5,25334797
35	1,99988	2,81386245	3,94608899	5,51601536
36	2,03988	2,89827833	4,10393255	5,79181613
37	2,08068	2,98522667	4,26808985	6,08140694
38	2,12229	3,07478348	4,43881345	6,38547729
39	2,16474	3,16702698	4,61636599	6,70475115
40	2,20803	3,26203779	4,80102062	7,03998871
41	2,25220	3,35989892	4,99306145	7,39198814
42	2,29724	3,46069589	5,19278391	7,76158755
43	2,34318	3,56451677	5,40049526	8,14966693
44	2,39005	3,67145227	5,61651508	8,55715028
45	2,43785	3,78159584	5,84117568	8.98500779
46	2,48661	3,89504371	6,07482271	9,43425818
47	2,53634	4,01189503	6,31781561	9,90597109
48	2,58707	4,13225188	6,57052824	10,40126964
49	2,63881	4,25621943	6,83334937	10,92133313
50	2,69158	4,38390602	7,10668334	11,46739978

II. Tafel,

welche die zu den verschiedenen Werthen von n und e gehörigen Werthe von K für W = 1 unmittelbar angiebt.

Werthe von n in Jahren	Für 3 p. C. oder e = 1,03	Für 4 p. C. oder e = 1,04	Für 5 p. C. oder e = 1,05	Für 6 p. C. oder e = 1,06
	Werthe von $K = \frac{1}{e^n}$	Werthe von $K = \frac{1}{e^n}$	Werthe von $K = \frac{1}{e^n}$	Werthe von $K = \frac{1}{e^n}$
1	0,97087378	0,96153846	0,95238095	0,943396
2	0,94259591	0,92455621	0,90702948	0,889996
3	0,91514166	0,88899636	0,86383760	0,839619
4	0,88848704	0,85480419	0,82270247	0,792094
4	0,86260878	0,82192710	0,78352616	0,747258
6	0,83748425	0,79031452	0,74621539	0,704961
7	0,81309151	0,75991781	0,71068133	0,665057
8	0,78940923	0,73069029	0,67683936	0,627412
9	0,76641673	0,70258673	0,64460891	0,591898
10	0,74409391	0.67556417	0,61391325	0,558395
11	0,72242127	0,64958093	0,58467929	0,526788
12	0,70137988	0,62459705	0,55683742	0,496969
13	0,68095134	0,60057408	0,53032135	0,468839
14	0,66111780	0,57747508	0,50506795	0,442301
15	0,64186194	0,55526450	0,48101710	0,417265
16	0,62316694	0,53390817	0,45811152	0,393646
17	0,60501644	0,51337324	0,43629668	0,371364
18	0,58739460	0,49362812	0,41552065	0,350344
19	0,57028602	0,47464242	0,39573395	0,330513
20	0,55367575	0,45638694	0,37688948	0,311805
21	0,53754927	0,43883360	0,35894236	0,294155
22	0,52189250	0,42195538	0,34184987	0,277505
23	0,50669175	0,40572633	0,32557130	0,261797
24	0,49193373	0,39012147	0,31006791	0,246979
25	0,47760557	0,37511680	0,29530277	0,232999

Fortsetzung der II. Tafel.

Werthe von n in Jahren	Für 3 p. C. oder e = 1,03	Für 4 p. C. oder e = 1,04	Für 5 p. C. oder e = 1,05	Für 6 p. C. oder e = 1,06
	Werthe von $K = \frac{1}{e^n}$	Werthe von $K = \frac{1}{e^n}$	Werthe von $K = \frac{1}{e^n}$	Werthe von $K = \frac{1}{e^n}$
26	0,46369442	0,36068923	0,28124073	0,219810
27	0,45018905	0,34681657	0,26784832	0,207368
28	0,43107675	0,33347747	0,25509363	0,195630
29	0,42434636	0,32065141	0,24294632	0,184557
30	0,41198676	0,30831867	0,23137745	0,174110
31	0,39998714	0,29646025	0,22035947	0,164255
32	0,38333703	0,28505794	0,20986616	0,154957
33	0,37702624	0,27409417	0,19987254	0,146186
34	0,36604490	0,26355209	0,19035480	0,137912
35	0,35538339	0,25341547	0,18129028	0,130105
36	0,34503242	0,24366872	0,17265741	0,122741
37	0,33498293	0,23429684	0,16443563	0,115793
38	0,32522615	0,22528543	0,15660536	0,109239
39	0,31575354	0,21662060	0,14914796	0,103056
40	0,30655684	0,20828904	0,14204568	0,097222
41	0,29762800	0,20027792	0,13528160	0,091719
42	0,28895922	0,19257493	0,12883962	0,086527
43	0,28054293	0,18516820	0,12270440	0,081630
44	0,27237178	0,17804634	0,11686133	0,077009
45	0,26443862	0,17119841	0,11129650	0,072650
46	0,25673652	0,16461385	0,10599667	0,068538
47	0,24925876	0,15828255	0,10094921	0,064658
48	0,24199880	0,15219476	0,09614211	0,060998
49	0,23495029	0,14634112	0,09156391	0,057546
50	0,22810708	0,14071261	0,08720372	0,054228

III. Tafel,

welche die zu den verschiedenen Werthen von n und e gehörigen Werthe von K für b = 1 angiebt.

Werthe von n in Jahren	Für 3 p. C. oder e = 1,03	Für 4 p. C. oder e = 1,04	Für 5 p. C. oder e = 1,05
	Werthe von $K = \frac{e^n - 1}{(e-1).e^n}$	Werthe von $K = \frac{e^n - 1}{(e-1).e^n}$	Werthe von $K = \frac{e^n - 1}{(e-1).e^n}$
1	0,97087378	0,96153846	0,59238095
2	1,91346969	1,88609467	1,85941043
3	2,82861135	2,77509103	2,72324803
4	3,71709840	3,62989522	3,54595050
5	4,57970718	4,45182233	4,32947667
6	5,41719144	5,24213685	5,07569206
7	6,23028295	6,00205467	5,78637339
8	7,01969219	6,73274487	6,46321276
9	7,78610892	7,43533161	7,10782167
10	8,53020283	8,11089578	7,72173493
11	9,25262411	8,76047671	8,30641422
12	9,95400399	9,38507376	8,86325163
13	10,63495533	9,98564784	9,39357298
14	11,29607314	10,56312293	9,89864094
15	11,93793508	11,11838743	10,37965804
16	12,56110202	11,65229560	10,83776956
17	13,16611847	12,16566885	11,27406624
18	13,75351308	12,65929697	11,68958690
19	14,32379910	13,13393940	12,08532086
20	14,87747486	13,59032634	12,46221034
21	15,41502413	14,02915994	12,82115270
22	15,93691663	14,45111533	13,16300258
23	16,44360838	14,85684166	13,48857388
24	16,93554212	15,24696314	13,79864179
25	17,41314769	15,62207994	14,09394456

Fortsetzung der III. Tafel.

Werthe von n in Jahren	Für 3 p. C. oder e = 1,03	Für 4 p. C. oder e = 1,04	Für 5 p. C. oder e = 1,05
	Werthe von $K = \frac{e^n - 1}{(e-1).e^n}$	Werthe von $K = \frac{(e^n - 1)}{(e-1).e^n}$	Werthe von $K = \frac{(e^n - 1)}{(e-1).e^n}$
26	17,87684242	15,98276917	14,37518530
27	18,32703147	16,32958574	14,64303362
28	18,76410822	16,66306321	14,89812725
29	19,18845459	16,98371463	15,14107358
30	19,60044135	17,29203330	15,37245102
31	20,00042849	17,58849356	15,59281050
32	20,38876552	17,87355150	15,80267666
33	20,76579177	18,14764567	16,00254920
34	21,13183667	18,41119776	16,19290400
35	21,48722007	18,66461323	16,37419429
36	21,83225250	18,90828195	16,54685170
37	22,16723543	19,14257880	16,71128734
38	22,49246148	19,36786423	16,86789270
39	22,80821513	19,58448484	17,01704067
40	23,11477197	19,79277388	17,15908635
41	23,41239997	19,99305181	17,29436795
42	23,70135920	20,18562674	17,42320757
43	23,98190213	20,37079494	17,54591198
44	24,25427391	20,54884129	17,66277331
45	24,51871254	20,72003970	17,77406982
46	24,77544907	20,88465356	17,88006649
47	25,02470783	21,04290611	17,98101571
48	25,26670663	21,19513088	18,07715782
49	25,50165692	21,34147200	18,16872173
50	25,72976401	21,48218461	18,25592546

IV. Tafel.

(Für den Beharrungsstand.)

Sterblichkeitsordnung im Allgemeinen.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden für eine Volksmenge, aus welcher jährl überhaupt 10000 sterben	Anzahl der Lebenden von jedem in der ersten Kolonne voranstehenden Jahre	Summe aller Lebenden von dem nebenstehenden Alter bis zu 100 Jahren und drüber	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
103—104	1	1	1	—	—
102—103	1	2	3	—	—
101—102	1	3	6	2	1
100—101	3	6	12	2	1
99—100	4	10	22	2,2	1,43
98—99	4	14	36	2,6	1,75
97—98	5	19	55	2,9	1,89
96—97	6	25	80	3,2	2,50
95—96	7	32	112	3,5	2,66
94—95	7	39	151	3,9	2,92
93—94	8	47	198	4,2	3,20
92—93	9	56	254	4,5	3,61
91—92	9	65	319	4,9	3,94
90—91	10	75	394	5,2	4,16
89—90	11	86	480	5,5	4,41
88—89	13	99	579	5,8	4,76
87—88	16	115	694	6,0	
86—87	20	135	829	6,1	
85—86	23	158	987	6,3	4,76

Fortsetzung der IV. Tafel.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden für eine Volksmenge, aus welcher jährl. überhaupt 10000 sterben	Anzahl der Lebenden von jedem in der ersten Kolonne voranstehenden Jahre	Summe aller Lebenden von dem nebenstehenden Alter bis zu 100 Jahren und drüber	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
84—85	26	184	1171	6,4	4,69
83—84	29	213	1384	6,5	
82—83	35	248	1632	6,6	
81—82	44	292	1924	6,6	
80—81	51	343	2267	6,6	4,77
79—80	58	401	2668	6,65	
78—79	66	467	3135	6,71	
77—78	72	539	3674	6,81	
76—77	77	616	4290	6,96	
75—76	81	697	4987	7,15	4,92
74—75	84	781	5768	7,38	
73—74	87	868	6636		
72—73	89	957	7593		
71—72	90	1047	8640		
70—71	92	1139	9779	8,59	6,66
69—70	94	1233	11012		
68—69	96	1329	12341		
67—68	98	1427	13768		
66—67	101	1528	15296		
65—66	104	1632	16928	10,37	8,54

Fortsetzung der IV. Tafel.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden für eine Volksmenge, aus welcher jährl. überhaupt 10000 sterben.	Anzahl der Lebenden von jedem in der ersten Kolonne voranstehenden Jahre	Summe aller Lebenden von dem nebenstehenden Alter bis zu 100 Jahren und drüber	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
64—65	106	1738	18666		
63—64	108	1846	20512		
62—63	105	1951	22463		
61—62	103	2054	24517		
60—61	101	2155	26672	12,83	10,69
59—60	99	2254	28926		
58—59	97	2351	31277		
57—58	95	2446	33713		
56—57	92	2538	36251		
55—56	89	2627	38872	14,79	13,19
54—55	87	2714	41592	15,32	
53—54	84	2798	44390		
52—53	81	2879	47269		
51—52	78	2957	50226		
50—51	77	3034	53260	17,55	16,11
49—50	75	3109	56369		
48—49	75	3184	59553		
47—48	74	3258	62811		
46—47	73	3331	66142		
45—46	73	3404	69546	20,43	19,41

Fortsetzung der IV. Tafel.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden für eine Volksmenge, aus welcher jährl. überhaupt 10000 sterben.	Anzahl der Lebenden von jedem in der ersten Kolonne vorstehenden Jahre.	Summe aller Lebenden von dem nebenstehenden Alter bis zu 100 Jahren und drüber.	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
44—45	72	3476	73022		
43—44	71	3547	76569		
42—43	70	3617	80186		
41—42	69	3686	83872		
40—41	68	3754	87626	23,34	22,63
39—40	68	3822	91448		
38—39	68	3890	95338		
37—38	68	3958	99296		
36—37	67	4025	103321		
35—36	66	4091	107412	26,25	26,11
34—35	65	4156	111569		
33—34	64	4220	115789		
32—33	63	4283	120072		
31—32	62	4345	124417		
30—31	61	4406	128823	29,24	29,69
29—30	60	4466	133289		
28—29	59	4525	137814		
27—28	58	4583	142397		
26—27	58	4641	147038		
25—26	58	4699	151737	32,30	33,03

Fortsetzung der IV. Tafel.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden für eine Volksmenge, aus welcher jährl. überhaupt 10000 sterben	Anzahl der Lebenden von jedem in der ersten Kolonne voranstehenden Jahre.	Summe aller Lebenden von dem nebenstehenden Alter bis zu 100 Jahren und drüber.	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
24—25	57	4756	156493		
23—24	56	4812	161305		
22—23	55	4867	166172		
21—22	54	4921	171093		
20—21	53	4974	176067	35,39	36,40
19—20	51	5025	181092		
18—19	48	5073	186165		
17—18	46	5119	191284		
16—17	45	5164	196448		
15—16	44	5208	201656	38,72	40,35
14—15	42	5250	206906		
13—14	43	5293	212199		
12—13	46	5339	217538		
11—12	48	5387	222925		
10—11	51	5438	228363	42,00	43,92
9—10	58	5496	233859		
8—9	70	5566	239425		
7—8	94	5660	245085		
6—7	135	5795	250880		
5—6	178	5973	256853	43,00	45,55
4—5	220	6193	263046	42,47	45,18
3—4	253	6446	269492	41,87	44,48
2—3	301	6747	276239	40,94	43,46
1—2	657	7404	283643	38,30	39,83
0—1	2596	10000	293643	29,36	19,90

V. Tafel.

(Für den Beharrungsstand.)

Sterblichkeitsordnung für das männliche Geschlecht.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden für eine Volksmenge, aus welcher jährl. überhaupt 10000 sterben	Anzahl der Lebenden von jedem in der ersten Kolonne voranstehenden Jahre	Summe aller Lebenden von dem nebenstehenden Alter bis zu 100 Jahren und drüber	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
0—1	2605	10000	286903		
1—2	792	7395	276903		
2—3	290	6603	269508		
3—4	234	6313	262905		
4—5	192	6079	256592		
5—6	158	5887	250512	42,55	44,89
6—7	132	5729	244623		
7—8	115	5597	238891		
8—9	96	5482	233290		
9—10	74	5386	227803		
10—11	57	5312	222411	41,87	43,18
11—12	47	5255	217092		
12—13	44	5208	211829		
13—14	42	5164	206613		
14—15	40	5122	201449		
15—16	39	5082	196327	38,63	39,50
16—17	37	5043	191245		
17—18	38	5006	186202		
18—19	40	4968	181196		
19—20	42	4928	176228		
20—21	44	4886	171300	35,06	35,60

Fortsetzung der V. Tafel.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden ꝛc.	Anzahl der Lebenden ꝛc.	Summe aller Lebenden ꝛc.	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
21—22	47	4842	166414		
22—23	50	4795	161572		
23—24	53	4745	156777		
24—25	55	4692	152032		
25—26	56	4637	147340	31,77	32,00
26—27	57	4581	142703		
27—28	58	4524	138122		
28—29	60	4466	133598		
29—30	62	4406	129132		
30—31	61	4344	124726	28,71	28,60
31—32	60	4283	120382		
32—33	61	4223	116099		
33—34	62	4162	111876		
34—35	62	4100	107714		
35—36	64	4073	103614	25,66	25,24
36—37	65	3937	99577		
37—38	66	3908	95604		
38—39	67	3842	91696		
39—40	68	3775	87854		
40—41	70	3707	84079	22,68	21,96

Fortsetzung der V. Tafel.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden ꝛc.	Anzahl der Lebenden ꝛc.	Summe aller Lebenden ꝛc.	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
41—42	72	3637	80372		
42—43	73	3565	76735		
43—44	75	3492	73170		
44—45	77	3417	69678		
45—46	78	3340	66261	19,84	18,73
46—47	79	3262	62921		
47—48	81	3183	59659		
48—49	83	3102	56476		
49—50	85	3019	53374		
50—51	87	2934	50365	17,16	15,59
51—52	87	2847	47431		
52—53	88	2760	44584		
53—54	88	2672	41824		
54—55	89	2586	39152		
55—56	89	2497	36566	14,64	12,69
56—57	90	2408	34069		
57—58	91	2318	31661		
58—59	92	2227	29343		
59—60	93	2135	27116		
60—61	95	2042	24971	12,22	10,04

Fortsetzung der V. Tafel.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden rc.	Anzahl der Lebenden : c.	Summe aller Lebenden rc.	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
61—62	98	1947	22929		
62—63	101	1849	20982		
63—64	107	1748	19133		
64—65	110	1641	17385		
65—66	108	1531	15744	10,28	7,98
66—67	104	1423	14213		
67—68	102	1319	12790		
68—69	98	1217	11471		
69—70	94	1119	10254		
70—71	91	1025	9135	8,91	6,64
71—72	87	934	8110		
72—73	83	847	7176		
73—74	78	764	6329		
74—75	72	686	5565		
75—76	65	614	4879	7,94	6,36
76—77	57	549	4265		
77—78	50	492	3716		
78—79	44	442	3224		
79—80	40	398	2782		
80—81	38	358	2384	6,66	5,13

Fortsetzung der V. Tafel.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden ꝛc.	Anzahl der Lebenden ꝛc.	Summe aller Lebenden ꝛc.	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
81—82	36	320	2026		
82—83	35	284	1706		
83—84	34	249	1422		
84—85	32	215	1173		
85—86	30	183	958	5,23	3,52
86—87	27	153	775		
87—88	24	126	622		
88—89	20	102	496		
89—90	15	82	394		
90—91	12	67	312	4,65	3,64
91—92	9	55	245		
92—93	8	46	190		
93—94	7	38	144		
94—95	7	31	106		
95—96	6	24	75	3,12	2,25
76—97	5	18	51		
97—98	4	13	33		
98—99	4	9	20		
99—100	2	5	11		
100—101	1	3	6	2,00	1,50
101—102	1	2	3		
102—103	1	1	1		

VI. Tafel.

(Für den Beharrungsstand.)

Sterblichkeitsordnung für das weibliche Geschlecht.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden für eine Volksmenge, aus welcher jährl. überhaupt 10000 sterben.	Anzahl der Lebenden von jedem in der ersten Kolonne voranstehenden Jahre.	Summe aller Lebenden vom nebenstehenden Alter bis zu 100 Jahren und drüber.	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
0—1	2868	10000	299872		
1—2	456	7132	289872		
2—3	289	6676	282740		
3—4	249	6387	276064		
4—5	188	6138	269677		
5—6	152	5950	263539	44,39	47,05
6—7	126	5798	257589		
7—8	97	5672	251791		
8—9	84	5575	246119		
9—10	73	5491	240544		
10—11	63	5418	235053	43,38	45,25
11—12	53	5355	229635		
12—13	44	5302	224280		
13—14	38	5258	218978		
14—15	35	5220	213720		
15—16	33	5185	208500	40,21	41,43
16—17	31	5152	203315		
17—18	30	5121	198163		
18—19	31	5090	193042		
19—20	32	5059	187957		
20—21	34	5027	182893	36,38	37,16

Fortsetzung der VI. Tafel.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden 2c.	Anzahl der Lebenden 2c.	Summe aller Lebenden 2c.	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
21—22	37	4993	177866		
22—23	40	4956	172873		
23—24	43	4916	167917		
24—25	47	4873	163001		
25—26	50	4826	150182	31,12	33,71
26—27	53	4776	153302		
27—28	56	4723	148526		
28—29	59	4667	143803		
29—30	62	4608	139136		
30—31	64	4546	134528	29,59	30,32
31—32	65	4482	129982		
32—33	66	4417	125500		
33—34	66	4351	121083		
34—35	65	4285	116732		
35—36	65	4220	112447	26,64	27,14
36—37	66	4155	108227		
37—38	67	4089	104072		
38—39	68	4022	99983		
39—40	69	3954	95961		
40—41	70	3885	92007	23,68	23,90

Fortsetzung der VI. Tafel.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden ꝛc.	Anzahl der Lebenden ꝛc.	Summe aller Lebenden ꝛc.	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
41—42	71	3815	88122		
42—43	72	3744	84307		
43—44	73	3672	80563		
44—45	74	3599	76891		
45—46	75	3525	73292	20,79	20,67
46—47	76	3450	69767		
47—48	77	3374	66317		
48—49	78	3297	62943		
49—50	79	3219	59646		
50—51	80	3140	56427	17,97	17,43
51—52	81	3060	53287		
52—53	82	2979	50227		
53—54	83	2897	47248		
54—55	84	2815	44351		
55—56	85	2731	41536	15,21	14,10
56—57	85	2646	38805		
57—58	86	2521	36159		
58—59	87	2475	33598		
59—60	87	2388	31123		
60—61	88	2301	28735	12,48	11,00

Fortsetzung der VI. Tafel.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden ꝛc.	Anzahl der Lebenden ꝛc.	Summe aller Lebenden ꝛc.	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
61—62	90	2213	26434		
62—63	93	2123	24221		
63—64	97	2030	22098		
64—65	101	1933	20068		
65—66	104	1832	18135	9,90	8,14
66—67	108	1728	16303		
67—68	113	1620	14575		
68—69	119	1507	12955		
69—70	121	1388	11448		
70—71	118	1267	10060	7,94	6,16
71—72	112	1149	8793		
72—73	107	1037	7644		
73—74	101	930	6607		
74—75	94	829	5677		
75—76	88	735	4848	7,00	4,76
76—77	83	647	4113		
77—78	77	564	3466		
78—79	70	487	2902		
79—80	65	417	2415		
80—81	56	352	1998	5,67	4,03

Fortsetzung der VI. Tafel.

Alter in Jahren	Anzahl der jährlich Sterbenden ꝛc.	Anzahl der Lebenden ꝛc.	Summe aller Lebenden ꝛc.	Mittlere Lebensdauer in Jahren	Wahrscheinliche Lebensdauer in Jahren
81—82	47	296	1646		
82—83	39	249	1350		
83—84	35	210	1101		
84—85	28	175	891		
85—86	23	147	716	4,87	3,62
86—87	21	124	569		
87—88	19	103	445		
88—89	17	84	342		
89—90	15	67	258		
90—91	12	52	191	3,67	2,50
91—92	10	40	139		
92—93	8	30	99		
93—94	7	22	69		
94—95	5	15	47		
95—96	3	10	32	3,20	2,00
76—97	2	7	22		
97—98	1	5	15		
98—99	1	4	10		
99—100	1	3	6		
100—101	1	2	3	1,50	1,00
101—102	1	1	1		

VII. Tafel.

Die Schwedische Sterblichkeitstafel von Wargentin.

Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.	Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.
0—1	10000	2195	26—27	5407	52
1—2	7805	509	27—28	5355	54
2—3	7296	344	28—29	5301	55
3—4	6952	245	29—30	5246	55
4—5	6707	143	30—31	5191	59
5—6	6564	122	31—32	5132	60
6—7	6442	105	32—33	5072	62
7—8	6337	87	33—34	5010	63
8—9	6250	73	34—35	4947	63
9—10	6177	62	35—36	4884	59
10—11	6115	54	36—37	4825	58
11—12	6061	45	37—38	4767	58
12—13	6016	42	38—39	4709	58
13—14	5974	38	39—40	4651	60
14—15	5936	37	40—41	4591	65
15—16	5899	37	41—42	4526	73
16—17	5862	40	42—43	4453	78
17—18	5822	40	43—44	4375	78
18—19	5728	42	44—45	4297	78
19—20	5740	43	45—46	4219	76
20—21	5697	47	46—47	4143	74
21—22	5650	47	47—48	4069	72
22—23	5603	48	48—49	3997	73
23—24	5555	48	49—50	3924	78
24—25	5567	50	50—51	3846	85
25—26	5457	50			

Fortsetzung der VII. Tafel.

Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.	Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.
51—52	3761	87	76—77	963	115
52—53	3674	90	77—78	848	105
53—54	3584	90	78—79	743	95
54—55	3494	91	79—80	648	90
55—56	3403	91	80—81	558	90
56—57	3312	92	81—82	468	84
57—58	3220	95	82—83	384	75
58—59	3125	95	83—84	309	65
59—60	3030	100	84—85	244	55
60—61	2930	108	85—86	189	45
61—62	2822	114	86—87	144	35
62—63	2708	118	87—88	109	27
63—64	2590	118	88—89	82	20
64—65	2472	118	89—90	62	15
65—66	2354	118	90—91	47	14
66—67	2236	118	91—92	33	12
67—68	2118	121	92—93	21	10
68—69	1997	124	93—94	11	6
69—70	1873	124	94—95	5	3
70—71	1749	127	95—96	2	1
71—72	1622	133	96—97	1	1
72—73	1489	135			
73—74	1354	140			
74—75	1214	130			
75—76	1084	121			

VIII. Tafel.

Die Halley'sche Sterblichkeitsordnung aus Breslau.

Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.	Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.
0—1	1000	145	21—22	586	7
1—2	855	57	22—23	579	6
2—3	798	38	23—24	573	6
3—4	760	28	24—25	567	7
4—5	732	22	25—26	560	7
5—6	710	18			
6—7	692	12	26—27	553	7
7—8	680	10	27—28	546	7
8—9	670	9	28—29	539	8
9—10	661	8	29—30	531	8
10—11	653	7	30—31	523	8
11—12	646	6	31—32	515	8
12—13	640	6	32—33	507	8
13—14	634	6	33—34	499	9
14—15	628	6	34—35	490	9
15—16	622	6	35—36	481	9
16—17	616	6	36—37	472	9
17—18	610	6	37—38	463	9
18—19	604	6	38—39	454	9
19—20	598	6	39—40	445	9
20—21	592	6	40—41	436	9

Fortsetzung der VIII. Tafel.

Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.	Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.
41—42	427	10	66—67	172	10
42—43	417	10	67—68	162	10
43—44	407	10	68—69	152	10
44—45	397	10	69—70	142	11
45—46	387	10	70—71	131	11
46—47	377	10	71—72	120	11
47—48	367	10	72—73	109	11
48—49	357	11	73—74	98	10
49—50	346	11	74—75	88	10
50—51	335	11	75—76	78	10
51—52	324	11	76—77	68	10
52—53	313	11	77—78	58	9
53—54	302	10	78—79	49	8
54—55	292	10	79—80	41	7
55—56	282	10	80—81	34	6
56—57	272	10	81—82	28	5
57—58	262	10	82—83	23	4
58—59	252	10	83—84	19	4
59—60	242	10	84—85	15	4
60—61	232	10	85—86	11	3
61—62	222	10	86—87	8	3
62—63	212	10	87—88	5	2
63—64	202	10	88—89	3	2
64—65	192	10	89—90	1	1
65—66	182	10			

IX. Tafel.

Die Londner Sterblichkeitstafel nach Simpson.

Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.	Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.
0—1	1000	320	21—22	355	5
1—2	680	133	22—23	350	5
2—3	547	51	23—24	345	6
3—4	496	27	24—25	339	6
4—5	469	17	25—26	333	6
5—6	452	12			
6—7	440	10	26—27	327	6
7—8	430	8	27—28	321	6
8—9	422	7	28—29	315	7
9—10	415	5	29—30	308	7
10—11	410	5	30—31	301	7
11—12	405	5	31—32	294	7
12—13	400	5	32—33	287	7
13—14	395	5	33—34	280	7
14—15	390	5	34—35	273	7
15—16	385	5	35—36	266	7
16—17	380	5	36—37	259	7
17—18	375	5	37—38	252	7
18—19	370	5	38—39	245	8
19—20	365	5	39—40	237	7
20—21	360	5	40—41	229	7

Fortsetzung der IX. Tafel.

Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.	Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.
41—42	222	8	61—62	97	5
42—43	214	8	62—63	92	5
43—44	206	7	63—64	87	5
44—45	199	7	64—65	82	5
45—46	192	7	65—66	77	5
46—47	185	7	66—67	72	5
47—48	178	7	67—68	67	5
48—49	171	6	68—69	62	4
49—50	165	6	69—70	58	4
50—51	159	6	70—71	54	4
51—52	153	6	71—72	50	4
52—53	147	6	72—73	46	4
53—54	141	6	73—74	42	3
54—55	135	6	74—75	39	3
55—56	129	6	75—76	36	3
56—57	123	6	76—77	33	3
57—58	117	5	77—78	30	3
58—59	112	5	78—79	27	2
59—60	107	5	79—80	25	0
60—61	102	5			

X. Tafel.

Die Kerseboomsche Sterbensordnung für Holland und Westfriesland.

Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.	Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.
0—1	1400	275			
1—2	1125	50	21—22	808	8
2—3	1075	45	22—23	800	8
3—4	1030	37	23—24	792	9
4—5	993	29	24—25	783	11
5—6	964	17	25—26	772	12
6—7	947	17	26—27	760	13
7—8	930	17	27—28	747	12
8—9	913	9	28—29	735	12
9—10	904	9	29—30	723	12
10—11	895	9	30—31	711	12
11—12	886	8	31—32	699	12
12—13	878	8	32—33	687	12
13—14	870	7	33—34	675	10
14—15	863	7	34—35	665	10
15—16	856	7	35—36	655	10
16—17	849	7	36—37	645	10
17—18	842	7	37—38	635	10
18—19	835	9	38—39	625	10
19—20	826	9	39—40	615	10
20—21	817	9	40—41	605	9

Fortsetzung der X. Tafel.

Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.	Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.
41—42	596	9	61—62	369	13
42—43	587	9	62—63	356	13
43—44	578	9	63—64	343	14
44—45	569	9	64—65	329	14
45—46	560	10	65—66	315	14
46—47	550	10	66—67	301	14
47—48	540	10	67—68	287	14
48—49	530	12	68—69	273	14
49—50	518	11	69—70	259	14
50—51	507	12	70—71	245	14
51—52	495	13	71—72	231	14
52—53	482	12	72—73	217	14
53—54	470	12	73—74	203	14
54—55	458	12	74—75	189	14
55—56	446	12	75—76	175	15
56—57	434	13	76—77	160	15
57—58	421	13	77—78	145	15
58—59	408	13	78—79	130	15
59—60	395	13	79—80	115	15
60—61	382	13	80—81	100	13

Fortsetzung der X. Tafel.

Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.	Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.
81—82	87	12	91—92	7	2
82—83	75	11	92—93	5	2
83—84	64	9	93—94	3	1
84—85	55	10	94—95	2	1
85—86	45	9	95—96	1	1
86—87	36	8			
87—88	28	7			
88—89	21	6			
89—90	15	5			
90—91	10	3			

XI. Tafel.

Die Kritter'sche Sterbensordnung beider

Für Ehemänner.			
Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
20	496	5	36,0
21	491	5	35,4
22	486	5	34,7
23	481	5	34,1
24	476	5	33,4
25	471	5	32,8
26	466	5	32,1
27	461	5	31,5
28	456	5	30,8
29	451	5	30,1
30	446	6	29,4
31	440	6	28,8
32	434	6	28,2
33	428	6	27,6
34	422	6	27,0
35	416	6	26,4
36	410	6	25,8
37	404	6	25,2
38	398	6	24,6
39	392	7	24,0
40	385	7	23,3

XI. Tafel.

Geschlechter mit der mittlern Lebensdauer.

Für Ehefrauen und Wittwen.			
Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
20	496	5	37,3
21	491	5	36,6
22	486	5	35,9
23	481	5	35,3
24	476	5	34,7
25	471	5	34,1
26	466	5	33,4
27	461	5	32,7
28	456	5	32,1
29	451	5	31,5
30	446	6	30,8
31	440	6	30,2
32	434	6	29,6
33	428	6	29,0
34	422	6	28,4
35	416	6	27,8
36	410	6	27,2
37	404	6	26,6
38	398	6	26,0
39	392	7	25,4
40	385	7	24,9

Fortsetzung der XI. Tafel.

Für Ehemänner.			
Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
41	378	7	22,7
42	371	7	22,1
43	364	7	21,5
44	357	7	20,9
45	350	8	20,3
46	342	8	19,7
47	334	8	19,1
48	326	8	18,6
49	318	8	18,0
50	310	9	17,5
51	301	9	16,9
52	292	9	16,4
53	283	9	15,9
54	274	9	15,4
55	265	10	14,9
56	255	10	14,4
57	245	10	14,0
58	235	10	13,5
59	225	10	13,1
60	215	10	12,7

Fortsetzung der XI. Tafel.

Für Ehefrauen und Wittwen.			
Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
41	378	7	24,3
42	371	7	23,7
43	364	7	23,1
44	357	7	22,5
45	350	7	22,0
46	343	7	21,4
47	336	7	20,8
48	329	7	20,3
49	322	7	19,7
50	315	7	19,1
51	308	7	18,5
52	301	7	17,9
53	294	7	17,3
54	287	7	16,7
55	280	8	16,2
56	272	8	15,6
57	264	8	15,0
58	256	8	14,5
59	248	8	14,0
60	240	9	13,4

Fortsetzung der XI. Tafel.

Für Ehemänner.			
Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
61	205	10	12,2
62	195	10	11,8
63	185	10	11,4
64	175	9	11,0
65	166	9	10,6
66	157	9	10,1
67	148	9	9,7
68	139	9	9,2
69	130	9	8,8
70	121	9	8,4
71	112	9	8,0
72	103	8	7,4
73	95	8	7,0
74	87	8	6,6
75	79	8	6,2
76	71	8	6,0
77	63	8	5,7
78	55	8	5,4
79	47	8	5,1
80	39	7	4,8

Fortsetzung der XI. Tafel.

Für Ehefrauen und Wittwen.			
Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
61	231	10	12,9
62	221	10	12,4
63	211	10	11,9
64	201	10	11,4
65	191	10	11,0
66	181	10	10,5
67	171	10	10,1
68	161	10	9,7
69	151	10	9,3
70	141	10	8,9
71	131	9	8,4
72	122	9	7,9
73	113	9	7,5
74	104	9	7,1
75	95	9	6,7
76	86	9	6,3
77	77	9	6,0
78	68	9	5,8
79	59	9	5,4
80	50	8	5,0

Fortsetzung der XI. Tafel.

Für Ehemänner.			
Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
81	32	6	4,7
82	26	5	4,5
83	21	4	4,3
84	17	3	4,2
85	14	3	3,9
86	11	2	3,6
87	9	2	3,2
88	7	2	2,9
89	5	2	2,6
90	3	1	2,6
91	2	1	2,5
92	1	0	3,0
93	1	0	2,0
94	1	1	1,0
95	0	0	0
96	0	0	0
97	0	0	0
98	0	0	0

Fortsetzung der XI. Tafel.

Für Ehefrauen und Wittwen.			
Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres.	Jährlicher Abgang.	Mittlere Lebensdauer.
81	42	8	5,0
82	34	7	5,0
83	27	6	5,0
84	21	5	5,0
85	16	4	5,0
86	12	3	5,3
87	9	2	6,0
88	7	1	6,0
89	6	1	6,0
90	5	0	6,0
91	5	0	5,0
92	5	0	4,0
93	5	1	3,0
94	4	1	2,5
95	3	1	2,0
96	2	1	1,5
97	1	1	1,0
98	0	0	0

XII. Tafel.

Sterbensordnung der Rentenirer.

Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.	Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.
0—1	10000	2550	25—26	5288	57
1—2	7450	362	26—27	5231	58
2—3	7088	265	27—28	5173	57
3—4	6823	205	28—29	5116	56
4—5	6618	150	29—30	5060	55
5—6	6468	123	30—31	5005	54
6—7	6345	102	31—32	4951	54
7—8	6243	91	32—33	4897	53
8—9	6154	81	33—34	4844	52
9—10	6073	69	34—35	4792	52
10—11	6004	58	35—36	4740	52
11—12	5946	49	36—37	4688	51
12—13	5897	43	37—38	4637	50
13—14	5854	39	38—39	4587	49
14—15	5815	37	39—40	4538	48
15—16	5778	38	40—41	4490	49
16—17	5740	41	41—42	4441	49
17—18	5699	44	42—43	4392	50
18—19	5655	47	43—44	4342	51
19—20	5608	50	44—45	4291	52
20—21	5558	52	45—46	4239	53
21—22	5506	53	46—47	4186	54
22—23	5453	54	47—48	4132	55
23—24	5399	55	48—49	4077	56
24—25	5344	56	49—50	4021	57

Fortsetzung der XII. Tafel.

Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.	Alter in Jahren	Lebende am Anfange des Jahres	Jährlicher Abgang.
50—51	3964	55	75—76	1479	142
51—52	3909	66	76—77	1337	139
52—53	3843	66	77—78	1198	134
53—54	3777	70	78—79	1064	128
54—55	3707	76	79—80	936	122
55—56	3631	81	80—81	812	115
56—57	3550	85	81—82	697	107
57—58	3465	88	82—83	590	98
58—59	3377	91	83—84	492	88
59—60	3286	95	84—85	404	77
60—61	3191	99	85—86	327	66
61—62	3092	102	86—87	261	55
62—63	2990	105	87—88	206	47
63—64	2885	107	88—89	159	42
64—65	2778	109	89—90	117	37
65—66	2669	110	90—91	80	30
66—67	2559	111	91—92	50	22
67—68	2448	112	92—93	28	14
68—69	2336	113	93—94	14	8
69—70	2223	114	94—95	6	3
70—71	2109	116	95—96	3	2
71—72	1993	119	96—97	1	1
72—73	1874	125	97—98	0	0
73—74	1749	132			
74—75	1616	138	Anhang hierzu s. die XIV. Taf.		

XIII. Tafel.

In Bezug auf Rentenirer.

I. α Alter in Jahren	II. N. Anzahl der Lebenden von nebenstehendem Alter.	III. $N \times 1{,}05^{96-\alpha}$ Producte aus den Zahlen II. in $e^{96-\alpha}$ für 5 p. C.	IV. W. Summen der Zahlen III. von oben herab.
96	1	1,0000000	1,0000000
95	3	3,1500000	4,1500000
94	6	6,6150000	10,765000
93	14	16,206750	26,971750
92	28	34,034175	61,005925
91	50	63,814078	124,82000
90	80	107,20765	232,02765
89	117	164,63075	396,65840
88	159	234,91541	631,57381
87	206	319,57361	951,14742
86	261	425,14149	1376,2889
85	327	560,28097	1936,5698
84	404	725,42595	2661,9958
83	492	927,73937	3589,7352
82	590	1168,1625	4757,8978
81	697	1449,0129	6206,9107
80	812	1772,4941	7979,4049
79	936	2145,3291	10124,734
78	1064	2560,6428	12685,376
77	1198	3047,2863	15732,663
76	1337	3547,4590	19280,122

Fortsetzung der XIII. Tafel.

I. α Alter in Jahren	II. N. Anzahl der Lebenden von nebenstehendem Alter.	III. $N \times 1{,}05^{96-\alpha}$ Producte aus den Zahlen II. in $e^{96-\alpha}$ für 5 p. C.	IV. W. Summen der Zahlen III. von oben herab.
75	1479	4121,4386	23401,560
74	1616	4727,2213	28128,782
73	1749	5372,0950	33500,877
72	1874	6043,8372	39544,714
71	1993	6749,0053	46293,720
70	2109	7498,9736	53792,693
69	2223	8299,4743	62092,168
68	2336	9157,4215	71249,589
67	2448	10076,300	81325,890
66	2559	11059,850	92385,741
65	2669	12112,027	104497,76
64	2778	13237,007	117734,77
63	2885	14434,198	132168,97
62	2990	15707,510	147876,48
61	3092	17045,519	164922,00
60	3191	18481,685	183403,68
59	3286	19983,503	203387,19
58	3377	21563,756	224950,94
57	3465	23231,962	248182,91
56	3550	24991,959	273174,87
55	3631	26840,308	300015,18
54	3707	28772,205	328787,38
53	3777	30781,291	359568,67
52	3843	32885,128	392453,80
51	3909	35122,395	427576,20

Fortsetzung der XIII. Tafel.

I. α Alter in Jahren	II. N. Anzahl der Lebenden von nebenstehendem Alter.	III. $N \times 1{,}05^{96-\alpha}$ Producte aus den Zahlen II. in $e^{96-\alpha}$ für 5 p. C.	IV. W. Summen der Zahlen III. von oben herab.
50	3964	37397,398	464973,60
49	4021	39652,709	504626,31
48	4077	42405,976	547032,28
47	4132	45126,948	592159,23
46	4186	48002,535	640161,77
45	4239	50970,823	691132,59
44	4291	54250,290	745382,88
43	4342	58539,099	803921,98
42	4392	61218,753	865140,73
41	4441	64996,836	930137,57
40	4490	69000,130	999137,70
39	4538	73224,183	1072361,8
38	4587	81085,840	1153447,7
37	4637	82490,842	1235938,5
36	4688	87568,033	1323506,6
35	4740	92966,308	1416472,9
34	4792	98685,452	1515158,3
33	4844	104742,26	1619900,6
32	4897	110164,03	1730064,6
31	4951	118031,29	1848095,9
30	5005	125284,68	1973380,6
29	5060	132994,61	2106375,2
28	5116	141240,81	2247616,0
27	5173	149900,85	2397516,9
26	5231	159160,63	2556677,5

Fortsetzung der XIII. Tafel.

I. α Alter in Jahren	II. N. Anzahl der Lebenden von nebenstehendem Alter.	III. $N \times 1{,}05^{96-\alpha}$ Producte aus den Zahlen II. in $e^{96-\alpha}$ für 5 p. C.	IV. W. Summen der Zahlen III. von oben herab.
25	5288	168939,68	2725617,2
24	5344	179265,19	2904882,4
23	5399	190165,68	3095048,1
22	5453	201671,08	3296719,2
21	5506	213812,76	3510531,9
20	5558	226330,09	3736862,0
19	5608	240095,40	3976957,4
18	5655	254413,11	4231370,5
17	5699	269000,61	4500371,2
16	5740	283987,05	4784358,2
15	5778	300684,30	5085042,5
14	5815	317623,95	5402666,5
13	5854	335864,83	5738531,3
12	5897	355248,49	6093779,8
11	5946	376110,48	6469890,3
10	6004	398768,09	6868658,4
9	6073	423518,41	7292176,8
8	6154	450625,54	7742802,4
7	6243	479999,68	8222802,0
6	6345	512234,16	8735036,2
5	6468	548272,20	9283308,4
4	6618	588904,23	9872212,6
3	6823	637646,79	10509859,
2	7088	695533,16	11205392,
1	7450	767608,33	11973001,

XIV. Tafel.

Als Anhang zur XII. Tafel.

Alter in Jahren	Lebende von jed. Alter.	Summe der Lebenden von jedem Alter und drüber.	Alter in Jahren	Lebende von jed. Alter.	Summe der Lebenden von jedem Alter und drüber.
96—97	1	1	70—71	2109	19602
95—96	3	4	69—70	2223	21825
94—95	6	10	68—69	2336	24161
93—94	14	24	67—68	2448	26609
92—93	28	52	66—67	2559	29168
91—92	50	102			
90—91	80	182	65—66	2669	31837
89—90	117	299	64—65	2778	34615
88—89	159	458	63—64	2885	37500
87—88	206	664	62—63	2990	40490
86—87	261	925	61—62	3092	43582
85—86	327	1252	60—61	3191	46773
84—85	404	1656	59—60	3286	50059
83—84	492	2148	58—59	3377	53436
82—83	590	2738	57—58	3465	56901
81—82	697	3435	56—57	3550	60451
80—81	812	4247	55—56	3631	64082
79—80	936	5183	54—55	3707	66789
78—79	1064	6247	53—54	3777	70566
77—78	1198	7445	52—53	3843	74409
76—77	1337	8782	51—52	3909	78318
75—76	1479	10261	50—51	3964	82282
74—75	1616	11877	49—50	4021	86303
73—74	1749	13626	48—49	4077	90380
72—73	1874	15500	47—48	4132	94512
71—72	1993	17493	46—47	4186	98698

Fortsetzung der XIV. Tafel.

Alter in Jahren	Lebende von jed. Alter.	Summe der Lebenden von jedem Alter und drüber.	Alter in Jahren	Lebende von jed. Alter.	Summe der Lebenden von jedem Alter und drüber.
45—46	4239	102937	20—21	5558	225703
44—45	4291	107228	19—20	5608	231311
43—44	4342	111570	18—19	5655	236966
42—43	4392	115962	17—18	5699	242665
41—42	4441	120403	16—17	5740	248405
40—41	4490	124893	15—16	5778	254183
39—40	4538	129431	14—15	5815	259998
38—39	4587	134018	13—14	5854	265852
37—38	4637	138655	12—13	5897	271749
36—37	4688	143343	11—12	5946	277695
35—36	4740	148083	10—11	6004	283699
34—35	4792	152875	9—10	6073	289772
33—34	4844	157719	8—9	6154	295926
32—33	4897	162616	7—8	6243	302169
31—32	4951	167567	6—7	6345	308514
30—31	5005	172572	5—6	6468	314982
29—30	5060	177632	4—5	6618	321600
28—29	5116	182748	3—4	6823	328423
27—28	5173	187921	2—3	7088	335511
26—27	5231	193152	1—2	7450	342961
25—26	5288	198440	0—1	10000	352961
24—25	5344	203784			
23—24	5399	209183			
22—23	5453	214639			
21—22	5506	220145			

XV. Tafel.

Nachtrag zu den Mortalitäts-Listen.

Namen der Provinzen.	Geborene Männl. Geschl.	Geborene Weibl. Geschl.	Geborene Summe.	Gestorbene Männl. Geschl.	Gestorbene Weibl. Geschl.	Gestorbene Summe.	Getraute Paare.
Kurmark Brandenburg	12313	11932	24245	9028	9173	18201	5533
Neumark Brandenburg	4831	4511	9342	4036	4018	8054	1990
Ostpreußen . . .	18909	17891	36800	13874	13859	27713	7913
Westpreußen . . .	14451	13377	27828	10210	9669	19879	5643
Schlesien	35363	33736	69099	28491	28059	56550	13449
Pommern	8016	7697	15713	5369	5323	10692	3231
Magdeburg . . .	4562	4358	8920	3919	4015	7934	1925
Halberstadt . . .	1528	1482	3010	1157	1164	2321	659
Hohenstein . . .	457	409	866	327	354	680	204
Quedlinburg . . .	189	176	365	163	173	336	85
Minden und Ravensberg	2829	2609	5438	1977	2108	4085	1226
Tecklenburg . . .	326	298	624	211	213	424	172
Lingen	375	361	736	339	319	658	225
Mörs	403	331	734	298	311	609	219
Geldern	989	877	1866	848	901	1749	473
Cleve und die Mark	4157	3778	7935	3319	3278	6597	1905
Ostfriesland . . .	1709	1584	3293	1386	1408	2794	870
Neufchatel und Valengin	683	705	1388	489	554	1043	360
Summe	112090	106112	227202	85441	84899	170340	

Hiernach verhalten sich die jährlich Gebornen des männl. Geschlechts zu den Geb. des weibl. wie 112090 : 106112 oder wie 105,63 : 100.

In Halle hat man (oben S. 49) das Verhältniß 106 : 100.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Langsdorf, Karl Christian <<von>>,

Arithmetische Abhandlungen über juristische, staats- und forstwirthschaftliche Fragen, Mortalität, Bevölkerung und chronologische Bestimmungen

Heidelberg ; Mannheim 1810

Math.p. 746 i
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11166916-8